GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK
előadásvázlat

Moussong Gábor, 2021.

Bevezetés

Az egybevágóság és a hasonlóság fogalmáról mint a geometria egyes tárgyai között fönnálló alapvető viszonyról már vannak előzetes ismereteink a középiskolai tapasztalatok alapján. Ebben a tantárgyban rávilágítunk arra, hogy ezeknek a fogalmaknak a megalapozásához, szigorú matematikai keretek között folyó vizsgálatához transzformációkra és azok tulajdonságainak megértésére van szükség.

A transzformációk matematikai fogalmának kialakítása céljából halmazok közötti leképezéseket használunk: egy transzformáció olyan bijektív leképezés ponthalmazok között, amely a kiindulási halmaz mindegyik pontjához hozzárendeli képként azt a pontot, ahova a transzformáció viszi. Eszerint a szemléletmód szerint a transzformáció mibenléte szempontjából csak a „végeredmény" számít: a transzformációnak nincs időbeli lefolyása, és közömbös, hogy a tárgypont milyen úton jutott el a képpontba. A transzformációk általában az egész téren (vagy ha síkgeometriában gondolkozunk, az egész síkon) értelmezett leképezések, tehát úgy gondoljuk, hogy az egész tér (illetve az egész sík) transzformálódik, és viszi magával a transzformálni kívánt ponthalmazt.

Ez a szemlélet lehetővé teszi, hogy a transzformációkat önmagukban, a transzformált alakzatoktól függetlenül értelmezzük és tanulmányozzuk. A kompozíció (egymás utáni elvégzés) művelete fontos algebrai tulajdonságokkal ruházza föl a transzformációk halmazát: egy rögzített ponthalmazt (akár az egész síkot vagy teret) önmagára képező adott típusú transzformációk ún. csoportot alkotnak. A csoportokat absztrakt keretek között az algebra tantárgyban ismerjük meg egy későbbi félévben; ehhez a geometriai transzformációk szolgáltatnak motivációt és példákat.

A tananyagban szigorú matematikai alapokra helyezzük és rendszerezzük az egybevágósággal és hasonlósággal kapcsolatos ismereteinket. Megismerkedünk ezektől eltérő jellegű transzformációkkal is (affinitásokkal, inverzióval), és azoknak egyes geometriai kérdésekben játszott szerepével. Végül kitérünk a legalapvetőbb geometriai mértékek: kerület, terület, térfogat és felszín származtatására elemi geometriai módszerekkel (tehát nem az integrálszámítás eszközére támaszkodva), és ezek viselkedésére egyes transzformációkkal szemben.

Ebben a jegyzetben a tantárgyhoz tartozó minden lényeges definíció és tétel megtalálható. A tételek bizonyításai és az egyes konkrét példákhoz tartozó magyarázatok nincsenek részletezve. Ezek csak az előadáson hangzanak el, és ugyanúgy a tananyag részét képezik, mint az itt leírtak.

1.1 Egybevágósági transzformációk

- **Definíciók:**
  Legyenek H és H' ponthalmazok. Egy $f : H \to H'$ leképezés egybevágóság H-ról H'-re, ha
  – bijektív (azaz létezik inverze), és
  – távolságtartó (azaz minden $A, B \in H$-ra $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$).

  Két ponthalmazt, H-t és H'-t egybevágónak mondunk, ha létezik $H \to H'$ egybevágóság.

  Egybevágósági transzformációnak nevezzük az olyan egybevágóságokat, amelyek az egész teret (illetve síkot, egyenest) képezik önmagára (attól függően, hogy térgeometriáról, síkgeometriáról, vagy az egyenes geometriájáról beszélünk).

Észrevételek:
Az „egybevágónak lenni" reláció ekvivalenciareláció a ponthalmazok körében. Az alábbi három észrevétel áll emögött:

– az identikus leképezés egybevágóság,
– bármely egybevágóság inverze is egybevágóság,
– két egybevágóság kompozíciója is egybevágóság.

Megjegyzések:
Az algebra nyelvén kifejezve ezek a megállapítások azt mutatják, hogy az egy bizonyos síkot vagy a teret önmagára képező egybevágósági transzformációk csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. (Ezért kompozíció helyett szorzatot is szokás mondani.)
Előfordul, hogy egybevágóságoknak egy bizonyos típusára vagy részhalmazára is érvényes ez a három megállapítás. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az ehhez a típushoz tartozó transzformációk részcsoportot alkotnak az egybevágósági transzformációk csoportjában. Például az eltolások, vagy valamely rögzített geometriai alakzatot önmagába képező egybevágóságok részcsoportot alkotnak az összes egybevágóság alkotta csoportban.

- **Példák:**
  - Bármely mozgás egybevágóság. Például síkban az eltolások és a pont körüli forgatások, térben az eltolások és az egyenes körüli forgatások mozgások, tehát egybevágósági transzformációk.
  - Vannak olyan, az iskolai tapasztalatból ismert egybevágóságok, amelyek nem mozgások: síkban ilyenek a tengelyes tükrözések, térben a síkra vonatkozó tükrözések.
  - Középpontos tükrözések: ezek mozgások a síkban, de nem mozgások a térben.

Ezeknek a jelenségeknek a magyarázatára, továbbá a mozgás fogalmának a pontosítására később visszatérünk.

- **Definíció:** A sík egy egybevágósági transzformációja irányítástartó, ha bármely pozitív körüljárású háromszöget pozitív körüljárású háromszögbe visz, illetve irányításváltó, ha nem irányítástartó.

Nyilván a sík bármely mozgása irányítástartó. Hamarosan ennek a megfordítását is belátjuk.

Az irányítástartás és -váltás fogalma kézenfekvő módon értelmezhető az egyenes egybevágósági transzformációira is. A tér esetében a definíció körülményesebb, még visszatérünk rá.

1.2 Egyértelműségi tételek

A következő két állításnak van külön az egyenesre, a síkra, illetve a térre vonatkozó változata; az egyszerűség kedvéért csak a síkra vonatkozó tételeket fogalmazzuk meg.

- **Tétel:**
  - *Ha a sík valamely h egybevágósági transzformációja a sík három nem kollineáris pontját helyben hagyja, akkor h az identikus leképezés.*
  - *Ha f és g a sík egybevágósági transzformációi, amelyek három nem kollineáris pontot ugyanazokba a képpontokba visznek, akkor $f = g$.*

(Tehát a sík bármely egybevágósági transzformációját egy tetszőlegesen választott háromszög csúcsai és azok képei egyértelműen meghatározzák.)

Kiegészítés:
Ezek a tételek lényegében ugyanígy érvényesek az egyenes, illetve a tér egybevágósági transzformációira, és a bizonyításuk is lényegében ugyanaz. A három nem kollineáris pont szerepét két különböző pont, illetve négy nem egysíkú pont veszi át.

1.3 Tükrözések

- **Tétel:** *A sík bármely egybevágósági transzformációja előállítható legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként.*

Kiegészítések, megjegyzések:

– Ha az adott egybevágóságnak van fixpontja, akkor legfeljebb két tükrözés is elég.

– A tétel térbeli változata (lényegében ugyanezzel a bizonyítással): a tér bármely egybevágósági transzformációja előállítható legfeljebb négy síkra vonatkozó tükrözés szorzataként. (Ha van fixpont, akkor legfeljebb három tükrözés elég.)

– A síkban a tengelyes tükrözések irányításváltók. Emiatt a sík egy tetszőleges egybevágósági transzformációja akkor és csak akkor irányítástartó, ha tengelyes tükrözések szorzataként való (bármilyen) előállításában páros sok tükrözés szerepel. Ennek mintájára a tér egy egybevágósági transzformációját is akkor nevezzük irányítástartónak, ha páros sok síkra vonatkozó tükrözés szorzataként állítható elő.

– A tétel következményei: bármely egybevágósági transzformáció egyenest egyenesbe, félegyenest félegyenesbe, szakaszt szakaszba, síkot síkba, félsíkot félsíkba, párhuzamos egyeneseket (illetve síkokat) párhuzamos egyenesekbe (illetve síkokba), bármely szöget vele egyenlő mértékű szögbe képez. Valóban, mindezeket tudjuk a tükrözésekről, ezért a tétel felhasználásával ugyanezek következnek tetszőleges egybevágósági transzformációkra is.

1.4 Kompozíciók a sík egybevágóságai körében

Az 1.5-beli osztályozási tétel előkészítése céljából meghatározzuk két síkbeli egybevágóság kompozícióját néhány konkrét esetben.

- **Tétel:**
  - *Két párhuzamos tengelyű tükrözés szorzata eltolás annak a vektornak a kétszeresével, amely az első tengelyt merőleges irányban a második tengelybe viszi.*
  - *Két metsző tengelyű tükrözés szorzata forgatás a metszéspont körül annak az irányított szögnek a kétszeresével, amely az első tengelyt a második tengelybe forgatja.*

Kiegészítések, megjegyzések:

- Mindkét esetben lényeges a két tükrözés sorrendje. Ugyanazt a két tükrözést fordított sorrendben elvégezve az inverz transzformációt kapjuk.
- Ha előre adott a síkban egy tetszőleges eltolás vagy forgatás, akkor azt mindig elő lehet állítani két alkalmas tengelyes tükrözés szorzataként. Ennél az előállításnál szabadon megválaszthatjuk az egyik tengely helyzetét, csak arra kell vigyáznunk, hogy merőleges legyen az adott eltolás irányára, illetve hogy áthaladjon az adott forgatás középpontján. (A másik tengely ezután már egyértelműen adódik.)

Tudjuk 1.3-ból, hogy minden síkbeli irányítástartó egybevágósági transzformáció előáll mint legfeljebb két tengelyes tükrözés szorzata. Ez csak eltolás vagy forgatás lehet, tehát mozgás.

- **Következmény:** *A síkban a mozgások pontosan az irányítástartó egybevágósági transzformációk.*

Ugyanezt látni fogjuk később a tér esetében is.

- **Definíció:** Csúsztatva tükrözésnek nevezzük a síkban egy tengelyes tükrözésnek és egy a tengellyel párhuzamos nemzérus vektorral való eltolásnak a szorzatát.

Megjegyzések:

- A csúsztatva tükrözés tehát irányításváltó egybevágóság.
- Mindegy, hogy a csúsztatva tükrözés származtatásánál a két transzformációt milyen sorrendben szorozzuk össze: a vektor és a tengely párhuzamosságának köszönhetően felcserélhetők.
- A csúsztatva tükrözés egyértelműen meghatározza azt a tükrözést és eltolást, amelyek szorzataként a definicióban leírt módon származik.
- Csúsztatva tükrözés inverze is csúsztatva tükrözés.

- **Tétel:**
  - *A síkban egy tengelyes tükrözés és egy (tetszőleges) eltolás szorzata tükrözés, ha az eltolásvektor merőleges a tengelyre, és csúsztatva tükrözés, ha nem.*
  - *A síkban egy tengelyes tükrözés és egy (identitástól különböző) forgatás szorzata tükrözés, ha a középpont illeszkedik a tengelyre, és csúsztatva tükrözés, ha nem.*

Megjegyzés: A két transzformációt (tehát a tükrözést és az eltolást a tétel első állításában, a tükrözést és a forgatást a másodikban) fordított sorrendben elvégezve általában más transzformáció lesz a szorzat, de annak a tétel által megadott típusa a sorrendtől függetlenül ugyanaz.

1.5 A sík egybevágóságainak osztályozása

- **Tétel:** *A sík bármely egybevágósági transzformációja eltolás, forgatás, tükrözés vagy csúsztatva tükrözés.*

Hasznos összefoglaló táblázat a négy transzformációtípusról:

	irányítástartó	irányításváltó
van fixpont	forgatás	tükrözés
nincs fixpont	eltolás	csúsztatva tükrözés

A sík bármely, identitástól különböző egybevágósági transzformációja a 2×2-es táblázatnak pontosan egy rovatába illeszkedik.

1.6 A tér mozgásai

Bár elvileg lehetséges volna, nem tűzzük ki célul a tér összes lehetséges egybevágósági transzformációinak az áttekintését. Csak a mozgásokra szorítkozunk, mert ezekről szép és egyszerű tételt tudunk bebizonyítani.

A tér mozgásaira eddig kétféle példát ismertünk meg: az eltolást és az egyenes körüli forgatást. Az 1.4-beli első tétel mintájára megállapíthatjuk, hogy ezek pontosan a két síkra vonatkozó tükrözés szorzataként előálló transzformációk: ha a két sík párhuzamos, eltolást kapunk, ha metsző, forgatást.

A kompozíció művelete segítségével újabb példát nyerhetünk mozgásokra:

- **Definíció:** Csavarmozgásnak nevezzük a térben egy tengely körüli forgatásnak és egy a tengellyel párhuzamos vektorral való eltolásnak a szorzatát.

Megjegyzések:

– Nem kötöttük ki, hogy a forgatás és az eltolás különbözzön az identitástól. Ezért úgy tekinthetjük, hogy az eltolások is és az egyenes körüli forgatások is a csavarmozgások speciális eseteként állnak elő (mégpedig olyankor, amikor a csavarmozgást előállító forgatás szöge nulla, illetve amikor az eltolásvektor nulla.)

– Mindegy, hogy a csavarmozgás származtatásánál a két transzformációt milyen sorrendben szorozzuk össze: a tengely párhuzamosságának köszönhetően felcserélhetők.

– Bármely, az identitástól különböző csavarmozgás egyértelműen meghatározza azt a forgatást és eltolást, amelyek szorzataként a definícióban leírt módon származik.

– Csavarmozgás inverze is csavarmozgás.

- **Tétel:** *A térben egy tengely körüli forgatás és egy (tetszőleges) eltolás szorzata mindig csavarmozgás. Ez a csavarmozgás tengely körüli forgatás, ha az eltolásvektor merőleges a tengelyre, egyébként pedig olyan csavarmozgás, amelynek nincsen fixpontja.*

- **Tétel:** *A tér bármely irányítástartó egybevágósági transzformációja csavarmozgás. Speciálisan, ha a tér valamely mozgásának van fixpontja, akkor ez a mozgás csak tengely körüli forgatás lehet.*

Megjegyzés: Így tehát ha a tér valamely mozgása legalább egy pontot fixen tart, akkor egy egész egyenes (a forgatás tengelye) is pontonként fixen marad. Nem létezik tehát olyan mozgás a térben, amely a teret egyetlen pont körül forgatja.

- **Következmény:** *A tér irányítástartó egybevágósági transzformációi pontosan a mozgások.*

2. Hasonlóság

2.1 Hasonlósági transzformációk

- **Definíciók:**

  Legyenek H és H' ponthalmazok, valamint $\lambda > 0$. Egy $f : H \to H'$ leképezés λ arányú hasonlóság H-ról H'-re, ha
  – bijektív, és
  – minden $A, B \in H$-ra $d(f(A), f(B)) = \lambda \cdot d(A, B)$.

  Ezt a λ pozitív számot az f hasonlóság arányának nevezzük.

  Két ponthalmazt, H-t és H'-t hasonlónak mondunk, ha létezik (valamilyen arányú) $H \to H'$ hasonlóság.

  Hasonlósági transzformációnak nevezzük az olyan hasonlóságokat, amelyek az egész teret (illetve síkot, egyenest) képezik önmagára (attól függően, hogy térgeometriáról, síkgeometriáról, vagy az egyenes geometriájáról beszélünk).

- **Példák:**

  – Bármely egybevágóság egyúttal hasonlóság, mégpedig az egybevágóságok pontosan a $\lambda = 1$ arányú hasonlóságok.

  – Középpontos hasonlóság (vagy röviden nyújtás): adott O középpont és $\lambda > 0$ arány mellett a tér egy tetszőleges A pontjának a képe az az egyértelműen meghatározott A' pont, amelyre $\overrightarrow{OA'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$.

Megjegyzések:

– A nyújtás ugyanezzel a definícióval a tér helyett a sík vagy az egyenes transzformációjaként is értelmezhető.

– A középpontos hasonlóság definíciójában megengedhető, hogy a λ arány negatív legyen; ekkor például a középpontos tükrözés felfogható mint -1 arányú nyújtás. A nyújtásnak mint hasonlósági transzformációnak negatív λ esetén is pozitív az aránya, mégpedig $|\lambda|$.

– A hasonlóságokra vonatkozóan is érvényesek az egybevágóságok esetében megállapított tuljdonságok, amelyek azt magyarázzák, hogy egyrészt a „hasonlónak lenni" reláció ekvivalenciareláció a ponthalmazok körében, másrészt hogy a hasonlósági transzformációk is csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve:
  – az identikus leképezés hasonlóság (az aránya 1),
  – bármely hasonlóság inverze is hasonlóság (és az aránya az eredeti hasonlóság arányának a reciproka),
  – két hasonlóság kompozíciója is hasonlóság (és az aránya a két arány szorzata).

• **Tétel:** *Bármely hasonlósági transzformáció előállítható egy nyújtás és egy egybevágósági transzformáció szorzataként. Egy ilyen előállításban a nyújtás középpontja tetszőlegesen előírható.*

• **Következmény:** *Bármely hasonlósági transzformáció egyenest egyenesbe, félegyenest félegyenesbe, szakaszt szakaszba, síkot síkba, félsíkot félsíkba, párhuzamos egyeneseket (illetve síkokat) párhuzamos egyenesekbe (illetve síkokba), bármely szöget vele egyenlő mértékű szögbe képez.*

2.2 A sík irányítástartó hasonlóságai

Az irányítástartás, illetve -váltás a sík hasonlóságaira ugyanúgy értelmezhető, mint az egybevágóságok esetében:

• **Definíció:** A sík egy hasonlósági transzformációja irányítástartó, ha bármely pozitív körüljárású háromszöget pozitív körüljárású háromszögbe visz, illetve irányításváltó, ha nem irányítástartó.

Az irányítástartó egybevágóságokon (vagyis az eltolásokon és forgatásokon) kívül a síkban bármely középpontos hasonlóság is irányítástartó. Egy további típus nyerhető a kompozíció alkalmazásával:

• **Definíció:** Forgatva nyújtásnak nevezzük a síkban egy pont körüli forgatásnak és egy ugyanazon pontból mint középpontból történő nyújtásnak a szorzatát.

Megjegyzések:

– Nem kötöttük ki, hogy a forgatás és a nyújtás különbözzön az identitástól. Ezért úgy tekinthetjük, hogy a nyújtások is és a pont körüli forgatások is a forgatva nyújtások speciális eseteként állnak elő (mégpedig olyankor, amikor a forgatás szöge nulla, illetve amikor a nyújtás aránya 1).

– Mindegy, hogy a forgatva nyújtás származtatásánál a két transzformációt milyen sorrendben szorozzuk össze: a középpontok egybeesésének köszönhetően felcserélhetők.

– Forgatva nyújtás inverze is forgatva nyújtás.

Meg fogjuk mutatni, hogy a síkban az eltolásokon és a forgatva nyújtásokon kívül nincs más irányítástartó hasonlósági transzformáció. Ehhez a komplex számokkal való számolást hívjuk segítségül a 2.3. szakaszban. Előtte viszont a sík irányítástartó hasonlóságaira vonatkozó egyértelműségi tételt tisztázzuk:

- **Tétel:**
  - *Ha a sík valamely h irányítástartó hasonlósági transzformációjának van legalább két fixpontja, akkor h az identikus leképezés.*
  - *Ha f és g a sík irányítástartó hasonlósági transzformációi, amelyek két különböző pontot ugyanazokba a képpontokba visznek (tehát létezik olyan $A \neq B$, hogy $f(A) = g(A)$ és $f(B) = g(B)$), akkor $f = g$.*

2.3 Komplex számok és hasonlóságok

A komplex számok $\mathbf{C}$ halmazát a szokásos módon a koordinátázott euklideszi síknak feleltetjük meg: a $z = x+yi$ komplex számot a koordinátasík (x, y) pontjával (illetve az (x, y) vektorral) tekintjük azonosnak. A komplex számokon végzett bizonyos műveletek mint $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ leképezések jól ismert transzformációkat adnak a síkon:

- rögzített $b \in \mathbf{C}$ mellett a $z \mapsto z + b$ $(z \in \mathbf{C})$ leképezés eltolás a b vektorral,
- ha $a \in \mathbf{C}$, $|a| = 1$, akkor a $z \mapsto az$ $(z \in \mathbf{C})$ leképezés forgatás az origó körül az $\arg a$ forgásszöggel,
- ha $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, akkor a $z \mapsto \lambda z$ $(z \in \mathbf{C})$ leképezés origó középpontú, λ arányú középpontos hasonlóság,
- ha $a \in \mathbf{C}$ tetszőleges nemzérus komplex szám, akkor a $z \mapsto az$ $(z \in \mathbf{C})$ leképezés forgatva nyújtás az origóval mint középponttal, melynek a forgásszöge $\arg a$, aránya $|a|$.

Így tehát az összes $z \mapsto az + b$ alakú függvény, ahol $a \neq 0$ és b tetszőleges komplex konstansok, a komplex sík irányítástartó hasonlósági transzformációja (hiszen ilyenek kompozíciója).

- **Tétel:** *A komplex sík minden irányítástartó hasonlósági transzformációja előáll $z \mapsto az + b$ alakban, ahol $a \neq 0$ és b alkalmas komplex konstansok.*
- **Tétel:** *Legyenek $a \neq 0$ és b tetszőleges komplex konstansok. A komplex sík $z \mapsto az+b$ képlettel adott transzformációja eltolás, ha $a = 1$, és forgatva nyújtás, ha $a \neq 1$.*
- **Következmény:** *A síkon bármely irányítástartó hasonlósági transzformáció vagy eltolás, vagy forgatva nyújtás.*

3. Affinitás

3.1 Affin transzformációk

- **Definíció:** Affin transzformációnak (vagy röviden affinitásnak) nevezünk egy síkot (esetleg másik) síkra, vagy a teret önmagára képező bijektív leképezést, ha egyenestartó (azaz bármely egyenesnek a képe egyenes).

Nyilván bármely egybevágósági vagy hasonlósági transzformáció egyúttal affinitás is. A következő példában olyan affinitás szerepel, amely általában nem hasonlóság.

- **Példa:** Legyen adott a térben két sík, S és S', továbbá egy e egyenes, amely sem S-sel, sem S'-vel nem párhuzamos. Az S síiknak az S'-re történő e irányú párhuzamos vetítésén azt az $S \to S'$ leképezést értjük, amelynél bármely $A \in S$ pontra és annak $A' \in S'$ képére $\overrightarrow{AA'} \parallel e$ teljesül.

- **Állítás:** *A párhuzamos vetítés affin transzformáció.*

Abban a speciális esetben, amikor $S \parallel S'$, a párhuzamos vetítés egybevágóság S és S' között. Ha viszont $S \nparallel S'$, akkor még csak nem is hasonlóság, hiszen például nem szögtartó. A párhuzamos vetítésnek azt a gyakran használt speciális esetét, amikor $e \perp S'$, merőleges vetítésnek nevezzük. (Ilyenkor természetesen S és S' nem lehet egymásra merőleges.)

Észrevételek: egy sík vagy a tér identikus leképezése affinitás, két affinitás kompozíciója is affinitás. Érdekes módon egy affinitás inverzéről nem olyan könnyű rögtön látni, hogy affinitás.

- **Állítás:** *Bármely affin transzformáció inverze is affin transzformáció.*

Így tehát egy rögzített síknak vagy az egész térnek az önmagába képező affin transzformációi csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve.

- **Tétel:**
  - *A térbeli affinitások síktartók (vagyis bármely sík affin képe is sík).*
  - *Bármely affinitás párhuzamosságtartó (vagyis párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez), továbbá a térbeli affinitások a síkok körében is párhuzamosságtartók.*

A következő tételt azokás az affin geometria alaptételének is nevezni. Az előbbieknél sokkal nehezebb volna bebizonyítani, ezért bizonyítás nélkül fogadjuk el.

- **Tétel:** *Bármely affinitás osztóviszonytartó (vagyis ha $A \neq B \neq C$ három kollineáris pont, és affin képeik A', B' és C', akkor $(ABC) = (A'B'C')$).*

Megjegyzés: Az osztóviszonytartás egyes speciális eseteit, például azt, hogy szakasz felezőpontja affinitásnál a felezőpontba kerül, könnyű ellenőrizni.

Az alaptétel következményeként az 1.2. szakaszban tárgyaltakhoz hasonló egyértelműségi állításokat tudunk az affinitásokra is megfogalmazni:

- **Tétel:**
  - *Ha egy affin transzformáció két különböző pontot, A-t és B-t fixen hagy, akkor az egész AB egyenest pontonként fixen hagyja.*

– *Ha egy affin transzformáció három nem kollineáris pontot, A-t, B-t és C-t fixen hagy, akkor az egész ABC síkot pontonként fixen hagyja.*
– *Ha f és g ugyanazon a síkon értelmezett affin transzformációk, amelyek három nem kollineáris pontot ugyanazokba a képpontokba visznek, akkor $f = g$.*

Megjegyzések, kiegészítések:

– Természetesen ezeknek az állításoknak a térbeli változata is érvényes (négy nem egysíkú pontot használva); a bizonyításokat kézenfekvő kiterjeszteni a tér esetére.
– A tétel harmadik állítását – az egybevágóságokról 1.2-ben bizonyítottakhoz hasonlóan – úgy is fogalmazhatjuk, hogy a sík egy affinitását egy háromszög és annak a képe egyértelműen meghatározza. A 3.3. szakaszban be fogjuk látni, hogy az affinitások esetében a képháromszög tetszőlegesen előírható, vagyis bármely háromszöget alkalmas affinitással át lehet transzformálni egy tetszőlegesen előírt méretű és alakú másik háromszögbe.

3.2 A sík tengelyes affinitásai

Ebben a szakaszban végig a síkkal foglakozunk, és csak a síkot saját magába képező affinitásokat vizsgáljuk. Példákat látunk olyan affin transzformációkra, amelyek nagyon különböznek az eddig ismert transzformációtípusoktól (egybevágóságoktól és hasonlóságoktól).

- **Definíció:** Egy egyenest az affinitás tengelyének nevezünk, ha minden pontját az affinitás fixen hagyja. Egy affinitást tengelyes affinitásnak nevezünk, ha létezik tengelye.

Észrevételek:

– Ha egy affinitásnak van két fixpontja, akkor tengelyes.
– Ha egy tengelyes affinitás különbözik az identitástól, akkor a tengely pontjain kívül nincs más fixpontja.
– Ha adott egy tengelyes affinitás tengelye, akkor a transzformációt egyértelműen meghatározza egyetlen további pont és annak a képe.

A továbbiakban t jelöli egy identitástól különböző tengelyes affinitás tengelyét, és P', Q', stb. jelöli a P, Q, stb. pontoknak az affinitásnál származó képét.

- **Tétel:** *Tetszőleges $P, Q \notin t$ pontokra $PP' \parallel QQ'$.*

Tehát tetszőleges $P \notin t$ pontra a PP' egyenes állása (párhuzamossági osztálya) független a P pont speciális választásától, vagyis csak magától a transzformációtól függ, annak egy fontos jellemzője.

- **Definíció:** A t tengelyű affinitás irányán a PP' egyenesek párhuzamossági osztályát értjük, ahol $P \notin t$.

Attól függően, hogy az irány hogyan áll a tengelyhez képest, szokás a tengelyes affinitásokat háromféle típusba sorolni:

- **Definíció:** Egy (az identitástól különböző) tengelyes affinitás
  – merőleges affinitás, ha az iránya merőleges a tengelyre,
  – nyírás, ha az iránya párhuzamos a tengellyel,
  – ferde affinitás egyébként.

- **Tétel:** *Tegyük föl, hogy a szóban forgó tengelyes affinitás nem nyírás. A sík egy tetszőlegesen kiszemelt $P \notin t$ pontjára legyen M a PP' egyenes és t metszéspontja, és legyen $\lambda \in \mathbf{R}$ az a skalár, amellyel $\overrightarrow{MP'} = \lambda\overrightarrow{MP}$. Ekkor a λ szám nem függ a P pont speciális választásától.*
- **Definíció:** Ezt a λ számot a tengelyes affinitás arányának nevezzük.

Megjegyzések:

- Az „arány” kifejezés korábban már szerepet játszott a hasonlóságok esetében. Ugyanazt a szót itt most más értelemben használjuk. A hasonlóságokon kívül arányt kizárólag az affinitások egy nagyon speciális típusa, a nyírástól különböző tengelyes affinitások számára tudunk értelmezni. Nyírásnak nincs aránya, és általában az affinitásoknak még kevésbé.
- A tengelyes tükrözések pontosan a -1 arányú merőleges affinitások.
- A függvényábrázolás középiskolás technikájában is szokás tengelyes affinitásokat használni. Ha egy f valós függvényt megszorzunk egy tetszőleges $\lambda \neq 0$ skalárral, akkor a két függvény grafikonjának az egyenlete a síkbeli Descartes-féle koordinátarendszerben $y = f(x)$, illetve $y = \lambda f(x)$. Ezért f grafikonját az a merőleges affinitás viszi λf grafikonjába, amelynek a tengelye az x-tengely, aránya a λ szám.

3.3 Affinitások megadása koordinátarendszerben

Az affin transzformációkat analitikusan, azaz koordináták segítségével szeretnénk kezelni. Az egyszerűség kedvéért síkgeometriára szorítkozunk. A tér esete ehhez hasonló módon tárgyalható (2 helyett 3 koordináta használatával).

Az $f : S \to T$ affinitásokat akarjuk vizsgálni, ahol S és T síkok (megengedve az $S = T$ esetet is). Rögzítsünk az S síkban egy koordinátarendszert. Ehhez ki kell szemelnünk egy O pontot origónak, és rögzítenünk kell a koordinátarendszer alapvektorait, amelyek bázist alkotnak a sík vektorai számára. Legyenek az alapvektorok $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Ebben a szakaszban még nem tesszük föl, hogy ez a koordinátarendszer Descartes-féle, vagyis nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a két alapvektor egységnyi hosszúságú és egymásra merőleges legyen. Ha $T \neq S$, akkor hasonló módon T-ben is választunk egy koordinátarendszert a P origóval és a $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ alapvektorokkal. (Ha $T = S$, akkor ugyanazt az S-beli koordinátarendszert használjuk a képpontok számára, mint a tárgypontok számára.)

A koordinátarendszer(ek) rögzítése után a sík(ok) pontjait helyvektorukkal jellmezzük: egy tetszőleges $X \in S$ pont helyett az $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ vektort szerepeltethetjük. Nem vezet félreértésre, ha X helyett $\mathbf{x}$-et írunk. Ilyen módon szeretnénk a vektorok nyelvén felírt képletet találni az $f : S \to T$ transzformációk számára. Jelöljük X'-vel az $f(X)$ képpontot, és $\mathbf{x}'$-vel annak helyvektorát, azaz $\overrightarrow{PX'}$-t. A rögzített koordinátarendszerekre vonatkozó koordinátákkal kifejezve legyen $\mathbf{x} = (x, y)$ (vagyis $\mathbf{x} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$), és legyen $\mathbf{x}' = (x', y')$ (vagyis $\mathbf{x}' = x'\mathbf{q} + y'\mathbf{r}$).

Állítsuk elő egy tetszőleges (x, y) pont képét az

$$x' = ax + by + u$$
$$y' = cx + dy + v$$

képletekkel, ahol a, b, c, d, u, v konstansok. (Ezzel a képlettel egy ún. inhomogén lineáris leképezést adtunk meg.) A jelölést tömörebbé tehetjük az $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix és a $\mathbf{v} = (u, v)$ vektor használatával:

$$\mathbf{x}' = M\mathbf{x} + \mathbf{v}\,. \tag{$*$}$$

- **Tétel:**
  - *Ha* $\det M \neq 0$, *akkor a* $(*)$ *képlet affin transzformációt definiál az* S *síkról a* T *síkra.*
  - *Bármely* $S \to T$ *affin transzformáció képlete a koordináták nyelvén* $(*)$ *alakú, ahol* $\det M \neq 0$. *Rögzített koordinátarendszerek mellett az* M *mátrixot is és a* $\mathbf{v}$ *vektort is a transzformáció egyértelműen meghatározza.*

Megjegyzés:
Ugyanez érvényes a sík helyett a tér affin transzformációira, csak ott 3 koordinátát, illetve 3×3-as mátrixokat használunk.

- **Következmény:** *Ha* $A, B, C \in S$ *és* $A', B', C' \in T$ *két tetszőlegesen adott nemkollineáris ponthármas, akkor létezik egy és csak egy olyan* $f : S \to T$ *affinitás, amelynél* $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ *és* $f(C) = C'$.

Megjegyzés:
Ugyanez érvényes a térben nem egysíkú pontnégyesekkel.

- **Példák:** Az alábbi példákban úgy választjuk a koordinátarendszereket, hogy $O' = P$ teljesüljön. Ennek következtében a $(*)$ formulában $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vagyis az affinitást csak egy mátrix adja meg.

- Tengelyes affinitások mátrixa:
  Válasszunk olyan koordinátarendszert, hogy az első koordinátatengely egybeessen az affinitás tengelyével.
  - Ha az affinitás iránya nem párhuzamos a tengellyel (azaz nem nyírásról van szó), akkor a második koordinátatengelyt az affinitás irányával választhatjuk párhuzamosnak. Ekkor a transzformáció mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, ahol λ az affinitás aránya.
  - Ha transzformáció nyírás, akkor a mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbf{R}$.
- Merőleges vetítés mátrixa:
  Legyenek S és T metsző síkok, a hajlásszögük $\varphi < \pi/2$, és válasszunk egy-egy Descartes-féle koordinátarendszert S-ben és T-ben úgy, hogy az első koordinátatengely mindkét esetben egybeessen az $S \cap T$ metszésvonallal, és az origó ugyanaz a pont legyen. Ekkor az S-nek T-re történő merőleges vetítését az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mátrix adja meg.

3.4 Egybevágósági és hasonlósági transzformációk koordinátás leírása

A 3.3-beli tételt szeretnénk pontosítani abban a speciális esetben, amikor a szóban forgó transzformáció egybevágóság vagy hasonlóság. A kérdés tehát az, hogy miről ismerhető fel a $(*)$ képletben, hogy egybevágóságot vagy hasonlóságot definiál. A válasz csak az M mátrix tulajdonságaiban lehet, hiszen a $\mathbf{v}$ additív konstans csak egy eltolással módosítja az M mátrix által létesített transzformációt.

Most feltesszük hogy az általunk használt koordinátarendszerek Descartes-félék, vagyis hogy alapvektoraik merőlegesek és egységnyiek. A továbbiakhoz szükség van erre a feltevésre, különben az itt következő megállapítások nem volnának igazak.

- **Tétel:** *Legyen $n = 2$ vagy 3, és legyen M $n \times n$-es négyzetes mátrix. Az M mátrixra nézve az alábbi feltételek egyenértékűek:*

  (1) *Az $\mathbf{x}' = M\mathbf{x}$ képlettel definiált transzformáció egybevágóság;*
  (2) *Az M mátrix oszlopvektorai páronként egymásra merőleges egységvektorok;*
  (3) $M^\top M = I$*;*
  (4) *Az M mátrix skalárisszorzat-tartó, azaz tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ vektorokra $(M\mathbf{x}) \cdot (M\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.*

- **Definíció:** A tételbeli feltételek bármelyikének (és így az összesnek is) eleget tevő négyzetes mátrixokat ortogonális mátrixoknak nevezzük.

Az ortogonális mátrixok felhasználásával a 3.3. szakasz tételének az egybevágóságokra vonatkozó esete tehát így fogalmazható:

- **Tétel:** *A sík vagy a tér egybevágósági transzformációi koordinátákkal kifejezve pontosan az $\mathbf{x}' = M\mathbf{x} + \mathbf{v}$ képlettel megadható leképezések, ahol M ortogonális mátrix (2×2-es a sík esetében, 3×3-as a tér esetében).*

- **Észrevétel:** *Bármely ortogonális mátrix determinánsa* $+1$ *vagy* -1.

- **Példák:** Teljes áttekintést tudunk adni a 2×2-es ortogonális mátrixokról. Bármelyik ilyen mátrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad M = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

  alakú, ahol $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Az első esetben az M által létesített transzformáció a sík forgatása az origó körül α forgásszöggel, a második esetben pedig a sík tükrözése a $\beta/2$ irányszögű, origón áthaladó egyenesre.

Megjegyzés: Ezekben a példákban jól látható, hogy a 2×2-es mátrix által adott egybevágóság irányítástartó, ha a mátrix determinánsa $+1$, és irányításváltó, ha a determináns -1. Ugyanez érvényes a háromdimenziós esetben is: belátható, hogy a tér egy egybevágósági transzformációja is pontosan aszerint irányítástartó vagy irányításváltó, hogy a koordinátás előállításában szereplő ortogonális mátrix determinánsa $+1$ vagy -1.

Ha a hasonlósági transzformációkat akarjuk koordinátás úton kezelni, akkor nem kell más eszközökhöz nyúlni: itt is ortogonális mátrixok játsszák a döntő szerepet. A 3.3-beli tétel hasonlóságokra vonatkozó esetét a 2.1-beli tétel felhasználásával tudjuk visszavezetni az egybevágóságok esetére:

- **Tétel:** *A sík vagy a tér hasonlósági transzformációi koordinátákkal kifejezve pontosan az* $\mathbf{x}' = (\lambda M)\mathbf{x}+\mathbf{v}$ *képlettel megadható leképezések, ahol* M *ortogonális mátrix (*2×2*-es a sík esetében,* 3×3*-as a tér esetében), és* $\lambda > 0$*.*

Megjegyzés: Megengedhetnénk azt is, hogy $\lambda < 0$ legyen, hiszen ha M ortogonális mátrix, akkor $-M$ is az, és $(-\lambda)(-M) = \lambda M$. Ha előírjuk λ pozitivitását, akkor λ-t is, M-et is és $\mathbf{v}$-t is a transzformáció egyértelműen meghatározza.

4. Inverzió

4.1 A síkbeli inverzió definíciója

Újabb transzformációval ismerkedünk meg, amely a síkot saját magába képezi. Lényegesen különbözik az eddig tárgyalt transzformációfajtáktól, mert például az egyenesek képe általában nem lesz egyenes.

- **Definíció:** Rögzítsünk az S síkon egy k kört, amelynek legyen O a középpontja, r a sugara. Azt mondjuk, hogy a sík két pontja, P és P', inverz pontok k-ra nézve (vagy hogy P és P' egymás inverzei k-ra nézve), ha P és P' ugyanarra az O-ból induló félegyenesre illeszkednek, és $OP \cdot OP' = r^2$. Ez a követelmény egyértelműen definiálja az

$$I_k : S - \{O\} \ \rightarrow \ S - \{O\}, \quad I_k(P) = P'$$

leképezést, amelyet k-ra vonatkozó inverziónak nevezünk. Vegyük észre, hogy az O pontban ez a leképezés nincs értelmezve. A k kört az inverzió alapkörének, az O középpontot az inverzió pólusának hívjuk.

Az alábbi észrevételek a definícióból közvetlenül következnek:

- **Állítások:**
  - *Az inverzió bijektív leképezés, és* $I_k \circ I_k = id_{S-\{O\}}$ *(vagyis az* I_k *transzformáció inverze önmaga).*
  - $I_k(P) = P \iff P \in k$*, azaz a* k *kör pontosan* I_k *fixpontjaiból áll.*
  - *Ha* $e \subset S$ *az* O *póluson áthaladó egyenes, akkor* $I_k(e - \{O\}) = e - \{O\}$*.*
  - *Két koncentrikus körre vonatkozó inverzió csak nagyításban tér el egymástól. Pontosabban: ha* k_1 *és* k_2 *közös középpontja* O*, sugaraik* r_1 *és* r_2*, akkor minden* $P \neq O$*-ra*

$$\overrightarrow{O\, I_{k_2}(P)} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \overrightarrow{O\, I_{k_1}(P)}.$$

4.2 Egyenesek és körök inverze, szögtartás

Az egyes geometriai alakzatok (tehát az S síkban fekvő ponthalmazok) inverzIónál származó képét az alakzat inverzének szokás nevezni. Az alábbiakban először meghatározzuk az egyenesek és körök inverzét. Rögzítjük a k alapkört és az O pólust. A jelölések egyszerűsítése céljából megállapodunk abban, hogy ha H az $S - \{O\}$ halmaz tetszőleges eleme vagy részhalmaza, akkor H' jelöli a H inverzét ($I_k(H)$ helyett).

- **Tétel:** *Legyen $e \subset S$ tetszőleges egyenes. Ha $O \in e$, akkor $(e-\{O\})' = e-\{O\}$. Ha pedig $O \notin e$, akkor az $e' \cup \{O\}$ ponthalmaz kör, amely áthalad az O ponton, és amelynek az O-beli érintője párhuzamos e-vel.*

- **Következmény:** *Ha l egy O-n áthaladó kör, akkor $(l - \{O\})'$ egyenes, amely párhuzamos l-nek az O-beli érintőjével.*

- **Tétel:** *Ha $l \subset S$ kör, melyre $O \notin l$, akkor az l' ponthalmaz is kör.*

- **Lemma:** *Ha két kör, vagy egy kör és egy egyenes érintkezik egy O-tól különböző pontban, akkor inverzeik is érintkeznek.*

Megjegyzés: Ha az érintkezési pont éppen az O pólus, akkor az inverz alakzatok párhuzamos egyenesek (hiszen egyrészt egyenesek, másrészt nem lehet közös pontjuk).

- **Definíció:** A síkban két metsző kör szögén a metszéspontban húzott érintőik hajlásszögét értjük. Hasonló módon egy kör és egy azt metsző egyenes szögén a metszéspontban húzott érintő és a metsző egyenes hajlásszögét értjük. (Bármelyik esetben mindegy, hogy a két metszéspont közül melyiket használjuk, hiszen szimmetriaokokból a két metszéspontban keletkező szögek egyenlők.)

  Ha a hajlásszög derékszög, akkor a két kört, illetve a kört és egyenest merőlegesnek mondjuk.

- **Tétel:** *Tegyük fel, hogy két kör, vagy egy kör és egy egyenes metszi egymást, és a szögük α. Ekkor inverzeik szöge is α.*

- **Következmény:** *Ha az l kör a k alapkört merőlegesen metszi, akkor inverze saját maga. Megfordítva, ha valamely k-tól különböző l körre $l' = l$ teljesül, akkor $l \perp k$.*

Megjegyzés: Ennek a szakasznak az eredményeit összefoglaló módon az inverzió alapvető invarianciatulajdonságainak szokás nevezni: az inverzió köröket vagy egyeneseket körökbe vagy egyenesekbe képez, valamint megőrzi ezek érintkezését és metszési szögét. (A tömörség kedvéért ebben a megfogalmazásban eltekintettünk a pólus kivételes viselkedésétől.)

4.3 Térbeli inverzió

Az inverzió térbeli változatának értelmezéséhez egy alapgömb rögzítésére van szükség, egyébként pedig a definíció pontosan olyan, mint a síkbeli esetben. A térbeli inverzió tulajdonságai hasonlók a síkbeliéihez.

- **Definíció:** Rögzítsünk a térben egy G gömböt, amelynek legyen O a középpontja, r a sugara. Azt mondjuk, hogy a tér két pontja, P és P', inverz pontok G-re nézve, ha P és P' ugyanarra az O-ból induló félegyenesre illeszkednek, és $OP \cdot OP' = r^2$. Ez a követelmény egyértelműen definiálja az O pólusú, G alapgömbre vonatkozó inverziót mint $I_G : P \mapsto P'$ leképezést, amely az O pont kivételével minden pontban értelmezve van.

Vegyük észre, hogy a térbeli inverziónak bármely, O-n áthaladó S síkra történő leszűkítése síkbeli inverzió az S síkban, mégpedig G-nek a $G \cap S$ főkörére mint alapkörre vonatkozóan. Ezért a térbeli inverziót úgy is felfoghatjuk, mint síkbeli inverziók összességét, amelyeket egyszerre hajtunk végre a G összes főkörére. Ennek az észrevételnek a következtében azoknak a köröknek és egyeneseknek az inverzeiről, amelyek egy O-n áthaladó síkban fekszenek, hasonlókat állíthatunk, mint a síkbeli inverzió esetében. Olyan körök esetében, amelyek síkja nem tartalmazza a pólust, kevésbé nyilvánvaló, hogy mi az inverzük.

Az alábbi tétel állításai forgásszimmetriára hivatkozva azonnal következnek a síkbeli inverzió hasonló tulajdonságaiból. Jelöléseinkben a vessző most is az inverziónál származó képet jelenti.

- **Tétel:**
  - *Ha S tetszőleges sík és $O \notin S$, akkor $S' \cup \{O\}$ gömb, amelynek az O pontbeli érintősíkja párhuzamos S-sel.*
  - *Ha H gömb és $O \in H$, akkor $(H - \{O\})'$ sík, amely párhuzamos H-nak az O-beli érintősíkjával.*
  - *Ha H gömb, melyre $O \notin H$, akkor H' is gömb.*
- **Következmény:** *Ha a térben fekvő k kör síkja nem halad át O-n, akkor k' is kör.*

Megjegyzés: A síkbeli esethez hasonlóan a térbeli inverzió is megtartja az érintkezést és a metszési szöget a körök és egyenesek között (sőt a gömbök és síkok között is). Erre később nem lesz szükségünk, és a bizonyításra nem térünk ki.

4.4 Sztereografikus vetítés

Újabb transzformációt értelmezünk, amely ezúttal gömbfelületet képez egy síkra.

- **Definíció:** Tekintsünk a térben egy G kört, amelynek legyen K a középpontja, r a sugara. Rögzítsünk továbbá egy $O \in G$ pontot, és legyen S a G-nek az O-val átellenes pontjában vett érintősíkja. Definiáljuk G-nek az S-re történő sztereografikus vetítését, a
$$v : G - \{O\} \;\to\; S$$
leképezést a következő szabállyal. Vegyük először észre, hogy G-nek az O-beli érintősíkja párhuzamos S-sel. Ha $P \in G$ és $P \neq O$, akkor az O kezdőpontú, P-n áthaladó félegyenes egyrészt nem fekszik ebben az érintősíkban, tehát nem párhuzamos S-sel, másrészt az O-beli érintősíknak ugyanabban a félterében halad, amely G-t és S-et tartalmazza. Ezért az S síkot ez a félegyenes egy egyértelműen meghatározott $P' = v(P)$ pontban döfi. Ezt a pontot nevezzük P sztereografikus vetületének.

A sztereografikus vetítés tehát középpontos vetítés a térben az O középpontból, amelyet a $G - \{O\}$ és S ponthalmazokra megszorítva tekintünk.

Érdekes módon a sztereografikus vetítés mint transzformáció az inverzióhoz nagyon hasonló invarianciatulajdonságokat mutat; ezeket tárgyaljuk a következő tételben. A tétel a gömbfelületen fekvő két kör érintkezéséről és metszési szögéről is szól; ezeket a fogalmakat kézenfekvő módon lehet a síkbeli eset mintájára definiálni.

- **Definíció:** Legyen k és l két különböző kör a G gömbfelületen. Azt mondjuk, hogy ez a két kör érintkezik, ha van közös pontjuk, és ebben a pontban az érintőjük ugyanaz az egyenes.

Észrevehetjük, hogy a G-n fekvő k és l körök érintkezését kétféleképpen is tudjuk egyenértékű módon jellemezni: akkor és csak akkor érintkeznek, ha síkjaik metszésvonala érinti a G gömböt, illetve ha egyetlen közös pontjuk van.

- **Definíció:** Legyen k és l két metsző (vagyis két közös ponttal bíró) kör a G gömbfelületen. Ezek szögén a metszéspontban húzott érintőik hajlásszögét értjük. (Most is mindegy, hogy a két metszéspont közül melyiket használjuk, hiszen a két körből álló konfiguráció szimmetrikus a két metszéspont felező merőleges síkjára.)

Az alábbi tétel kimondásakor ismét azzal a megállapodással élünk, hogy ha H a G gömbön fekvő pont vagy ponthalmaz, akkor H' jelöli H-nak a sztereografikus vetületét (vagyis $H' = v(H)$).

- **Tétel:**
  - *Legyen $k \subset G$ tetszőleges kör. Ha $O \in k$, akkor a $(k - \{O\})'$ ponthalmaz egyenes az S síkban, amely párhuzamos k-nak az O-beli érintőjével. Ha pedig $O \notin k$, akkor k' kör.*
  - *Ha a $k, l \subset G$ körök egy O-tól különböző pontban érintkeznek, akkor k' és l' is érintkező körök (vagy kör és egyenes) az S síkban.*
  - *Ha a $k, l \subset G$ körök α szögben metszik egymást, akkor k' és l' (amelyek körök vagy egyenesek lehetnek) metszési szöge is α.*

4.5 Inverzió alkalmazása szerkesztési kérdésekben

Az euklideszi szerkesztésekben egyenesek és körök játsszák a meghatározó szerepet. Az inverzió pedig éppen ezeket az alakzatokat, a köröket és egyeneseket transzformálja egymás között. Ez az oka annak, hogy sok érdekes szerkesztési feladatban a megoldás kulcsa az, hogy alkalmasan választott inverzióval a feladatot át tudjuk alakítani olyan feladattá, amelyet könnyebben meg tudunk oldani.

Az inverziót olyan formán alkalmazzuk, hogy ha adott egy szerkesztési feladat, mi választhatjuk meg az inverziót, amely várhatóan egyszerűsíti a kérdést. Az inverzióval a feladat adatait is, és a megszerkesztendő alakzatokat is áttranszformáljuk az inverzeikbe, és ezzel előállítunk egy „inverz” szerkesztési feladatot, majd azt megoldjuk. Végül az inverz feladat megszerkesztett megoldására ismét alkalmazzuk az inverziót, és ezzel előállítjuk az eredeti feladat megoldását.

Ezt az elvet alább konkrét szerkesztési feladatokon fogjuk illusztrálni. Előtte viszont tisztázni kell, hogy magát az inverziót is végre tudjuk hajtani euklideszi szerkesztéssel.

- **Tétel:** *Ha adott az inverzió alapköre, akkor bármely adott pont, egyenes, vagy kör inverze euklideszi szerkesztéssel megszerkeszthető.*

- **1. példa:** Tekintsük a következő szerkesztési feladatot:

  Adott két kör, k_1 és k_2, és egy rájuk nem illeszkedő P pont. Szerkesszünk olyan kört, amely áthalad P-n és érinti k_1-et is és k_2-t is.

A megoldás ötlete az, hogy olyan inverziót alkalmazunk, amelynek a pólusa a P pont. Az inverzió körtartását és érintkezéstartását használjuk ki. Az inverz feladatban két adott kört érintő egyenest kell szerkeszteni. Ennek, vagyis két kör közös érintője szerkesztésének jól ismerjük a megoldását. (Emlékezzünk vissza a „zsugorításos" módszerre, amely a megoldáshoz elvezet.)

Megjegyzés: Az antik időkből származó szerkesztési probléma az ún. Apollóniosz-féle feladat: ha adott három kör, szerkesszünk mindhármat egyszerre érintő negyedik kört. A zsugorításos módszert alkalmazva ezt vissza tudjuk vezetni az 1. példabeli feladatra. Ezáltal – közvetve – inverziós megoldást kaptunk az Apollóniosz-feladatra.

- **2. példa:** Tekintsük a következő szerkesztési feladatot:

  Adott két egyenes, e és v, és egy v-re nem illeszkedő F pont. Szerkesszünk olyan pontot az e egyenesen, amely egyenlő távolságra van v-től és F-től.

A feladat inverziós megoldásához előzetesen fel kell ismerni, hogy a feladat olyan formában is megfogalmazható, amelyre az inverzió invarianciatulajdonságai alkalmazhatók. Olyan k kör középpontját kell megszerkeszteni, amelyre

- F illeszkedik k-ra,
- v érinti k-t, és
- e merőlegesen metszi k-t.

A megoldás ötlete az, hogy olyan inverziót alkalmazunk, amelynek a pólusa az F pont. Az inverz feladatban olyan egyenest kell szerkeszteni, amely érinti a v kör inverzét (a v' kört), és merőlegesen metszi az e egyenes inverzét (az e' kört vagy egyenest). Ez könnyűszerrel megoldható, az eredményre az inverziót alkalmazva megkapjuk a k kört, és végül ennek középpontja a keresett pont.

Megjegyzés: a 2. példabeli szerkesztés tulajdonképpen egy parabola és egy egyenes metszéspontjainak a megszerkesztését adta. A v egyenes mint vezéregyenes és az F pont mint fókusz ugyanis parabolát határoz meg a síkon (ami definíció szerint a v-től és F-től egyenlő távolságra levő pontok mértani helye), és a feladat ennek a parabolának az e egyenesre illeszkedő pontjai megszerkesztését kéri. Egy későbbi tantárgyban látni fogjuk, hogy ehhez hasonló módszerrel egyéb kúpszeleteknek is megszerkeszthetők egy adott egyenessel vett metszéspontjai.

4.6 Mascheroni-féle szerkesztések

Az euklideszi szerkesztések alaplépései a körző és a vonalzó használatát imitálják. Ha csak a körző használata van megengedve, akkor egyenest ugyan nem tudunk megrajzolni, de pontok és körök szerkesztésére ugyanolyan szabályokat alkalmazhatunk, mint az euklideszi szerkesztések során. Az ilyen – tehát csak a körző használatát megengedő – szerkesztést Mascheroni-féle szerkesztésnek nevezzük.

Tekintsük át, hogy pontosan miből is állnak a Mascheroni-szerkesztések. A kiinduló adatok bizonyos rögzített pontok és körök lehetnek; ezeket a szerkesztés során már megszerkesztettnek tekintjük. A szerkesztések elemi lépései most az euklideszieknek közül csak azok, amelyekben nincs szó egyenesről:

– Ha O, P és Q már megszerkesztett pontok, akkor az O középpontú, PQ sugarú kört megszerkesztettnek tekinthetjük.
– Ha k és l már megszerkesztett, egymást metsző körök, akkor k és l mindkét metszéspontját megszerkesztettnek tekinthetjük.

Nyilván minden Mascheroni-szerkesztés egyúttal euklideszi szerkesztés is, tehát bármi (bármely pont és kör), ami Mascheroni-szerkesztéssel megszerkeszthető, megszerkeszthető euklideszi értelemben is. Nevezetes tény, hogy ennek a megfordítása is igaz.

- **Tétel (Mohr–Mascheroni-tétel):** *Bármely pont vagy kör, amely euklideszi szerkesztéssel megszerkeszthető, megszerkeszthető Mascheroni-féle szerkesztéssel is.*

Ezt a tételt a síkbeli inverzió felhasználásával is be lehet bizonyítani. A részletektől eltekintünk, és csak vázoljuk azokat a lépéseket, amelyekből összeáll a tétel bizonyítása. Valahányszor egy euklideszi szerkesztési lépésben egyenes szerepel, az két pontja által van megadva, és a Mascheroni-szerkesztésben ez a két pont reprezentálja az egyenest. Az euklideszi szerkesztéseknek az egyenest felhasználó elemi lépéseit Masheroni-féle szerkesztéssel kell helyettesítenünk. Az alapötlet a következő: valahányszor az euklideszi szerkesztésben két egyenes, vagy egy kör és egy egyenes metszéspontjait kell kijelölni, alkalmas inverzióval ezeket körökbe visszük, az inverz ábrán a két kör metszéspontjait kijelöljük, majd inverzióval visszatranszformáljuk az eredeti szerkesztési ábrába.

Ennek az ötletnek a kivitelezéséhez az alábbiakat kell végiggondolni:

- *Adott alapkörre vonatkozóan bármely pont inverze csak körző használatával is megszerkeszthető.*
- *Három adott nem kollineáris ponton áthaladó kör középpontja csak körző használatával is megszerkeszthető.*
- *Adott alapkörre vonatkozóan bármely, a póluson át nem haladó egyenes vagy kör inverze csak körző használatával is megszerkeszthető.*

5. Kerület

A geometria alapvető eszközei közül jó néhány a mérés fogalmával kapcsolatos. Ezek közül a távolság és a szög fontos szerepet játszik a geometria megalapozásában, ezért mibenlétüket már korábban tisztáztuk. Az alakzatok méretére vonatkozó néhány további, már a középiskolában is gyakran használt és jól ismert fogalom síkban a kerület és a terület, térben a térfogat és a felszín. Ezek pontos jelentése és származtatása nehéz, és jóval meghaladja a középiskolás matematikai ismeretek kereteit. Kétféle eljárás alkalmazható. Egyrészt lehet az analízis (elsősorban az integrálszámítás) eszközeihez folyamodni, és ezzel az egész témakört az analízis fejezetei közé utalni. Másrészt viszont ezeknek a fogalmaknak lehet a geometria keretei között maradó szigorú megalapozást is adni. Tananyagunk további részében ezt az utóbbi eljárást vázoljuk. Nem fogunk minden technikai részletet kidolgozni, bizonyos tételeket, elsősorban a terület és a térfogat fogalmának a megalapozásával kapcsolatban, bizonyítás nélkül fogunk elfogadni.

Célunk tehát nem az, hogy módszereket fejlesszünk ki alakzatok kerületének, területének, térfogatának vagy felszínének a kiszámítására (erre a célra az analízis módszerei hatékonyabbak), hanem az, hogy precíz definíciókat adjunk e fogalmak számára.

5.1 Sokszög kerülete

Sokszögek kerületét kézenfekvő módon tudjuk definiálni:

- **Definíció:** Egy sokszög kerületén az oldalai hosszának az összegét értjük. Az S sokszög kerületét általában $k(S)$-sel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy egybevágó sokszögek kerülete egyenlő, valamint hogy ha egy sokszöget λ arányú hasonlóság visz egy másik sokszögbe, akkor a második sokszög kerülete az első kerületének a λ-szorosa. A következő tétel szerint konvex sokszögekre vonatkozóan érvényes a kerület ún. monotonitási tulajdonsága, amit a későbbiekben lényegesen kihasználunk:

- **Tétel:** *Ha az S_1 és S_2 konvex sokszögekre $S_1 \subseteq S_2$ fennáll, akkor $k(S_1) \leq k(S_2)$.*

Megjegyzések:
Szigorú tartalmazás esetén a kerületek közt szigorú egyenlőtlenség is érvényes.
Meggondolható, hogy a tételben a konvexitást elég az S_1 sokszögről feltenni, az S_2 sokszögnek nem kell konvexnek lennie.
Az S_1 konvexitására vonatkozó feltétel viszont nem hagyható el, hiszen akármilyen kis helyre tudunk olyan (nem konvex) sokszöget rajzolni, amelynek a kerülete tetszőlegesen nagy lehet. Ez vezet minket arra, hogy amikor a kerület fogalmát sokszögnél általánosabb idomokra akarjuk kiterjeszteni, csak konvex ponthalmazokra fogunk szorítkozni.

5.2 Konvex lemez kerülete

Nem tudunk minden síkidomnak, vagyis bármely síkbeli ponthalmaznak kerületet tulajdonítani, nem is lehet. Ezért alakzatoknak egy olyan osztályára szorítkozunk, amelyek esetében meg tudunk fogalmazni egy kielégítő definíciót a kerület számára, és amely elég általános ahhoz, hogy a geometriában leggyakrabban vizsgált alakzatok odatartozzanak.

- **Definíció:** Konvex lemeznek nevezzük azokat a korlátos, zárt, konvex halmazokat a síkban, amelyeknek van belső pontja.

Bármely háromszög, téglalap, vagy általánosabban bármely konvex sokszög példa konvex lemezre. Sokszögtől különböző konvex lemez például egy zárt körlap, körszelet, vagy konvex körcikk. Könnyen meggondolható, hogy a sík bármely affin transzformációjánál konvex lemez képe mindig konvex lemez lesz.

- **Definíció:** Az L konvex lemez kerületén az L által tartalmazott konvex sokszögek kerületének a felső határát értjük. Formulával:

$$k(L) = \sup \{k(S) : S \text{ konvex sokszög}, S \subseteq L\} .$$

  Megjegyzés: A formulában supremum helyett nem írhatunk maximumot, hiszen a jobb oldalon álló számhalmaznak nem feltétlenül létezik legnagyobb eleme. Például körlap esetében biztosan ez a helyzet.

Az alábbi tétel a konvex lemezek kerületének néhány olyan tulajdonságát állapítja meg, amelyek a definícióból közvetlenül következnek az előző szakaszbeli tételt felhasználva.

- **Tétel:**
  - *Bármely L konvex lemezre $0 < k(L) < +\infty$ teljesül.*
  - *Ha L konvex sokszög, akkor $k(L)$ egyenlő az előző szakaszban megállapított kerületével (vagyis az oldalhosszai összegével).*
  - *Ha L_1, L_2 konvex lemezek és $L_1 \subseteq L_2$, akkor $k(L_1) \leq k(L_2)$.*

A következő tétel a kerületnek egyes transzformációkkal szembeni viselkedését állapítja meg.

- **Tétel:**
  - *Ha az L_1 és L_2 konvex lemezek egybevágók, akkor $k(L_1) = k(L_2)$.*
  - *Ha az L_1 és L_2 konvex lemezek hasonlók, és L_1-et λ arányú hasonlóság viszi L_2-be, akkor $k(L_2) = \lambda \cdot k(L_1)$.*

Megjegyzés: Affinitások esetére nincs a tételnek megfelelője: ha egy konvex lemezt affinitás visz egy másikba, akkor nincsen semmiféle általános szabályszerűség a kerületeik közti kapcsolatra. (Inverzió esetére persze még kevésbé.)

5.3 A kör kerülete, körív hossza

Mivel a körlap konvex lemez, az 5.2-beli definíció a kör kerületét is megadja. Most azt fogjuk tisztázni, hogy a kör kerületéhez szabályos sokszögekkel történő közelítés útján is eljuthatunk. A 6. fejezet körrel kapcsolatos eredményei is erre a módszerre fognak támaszkodni.

Nyilvánvaló, hogy bármely két körlap hasonló, és a hasonlóság aránya a sugarak arányával egyenlő. Ezért ha k-val jelöljük valamely kör kerületét, és d-vel az átmérőjét, akkor a k/d arány minden kör esetében ugyanaz a szám. Ezt a számot jelöljük π-vel, tehát az r sugarú kör kerülete $2r\pi$.

Legyen adott egy r sugarú kör és egy $n \geq 3$ természetes szám. Tudjuk, hogy egybevágóság erejéig egyértelműen létezik a körbe beírható n-oldalú szabályos sokszög (vagyis olyan szabályos n-szög, amelynek minden csúcsa a körre illeszkedik), valamint a kör köré írható n-oldalú szabályos sokszög (vagyis olyan szabályos n-szög, amelynek minden oldala a kört érinti). Jelölje k_n, illetve K_n ezeknek a sokszögeknek a kerületét.

- **Tétel:**

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} K_n = 2r\pi .$$

- **Definíció:** A körön felvett két pont, A és B, a körvonalat két ívre bontja, amelyek egyesítése a teljes körvonal. Válasszuk ki az egyik ívet, és tekintsük azt az L körszeletet, amely ennek az ívnek a konvex burka. Ekkor L konvex lemez. A kiválasztott körív ívhosszán a $k(L) - h$ számot értjük, ahol h az AB húr hosszát jelöli.

Az alábbi tétel állításait szemléletességük miatt bizonyítás nélkül, a technikai részletek mellőzésével elfogadjuk.

- **Tétel:**
  - *A körvonalon az ívhossz mérése additív, vagyis ha egy körívet valamely pontja két részívre bontja, akkor a teljes ív hossza egyenlő a két részív hosszának az összegével.*
  - *Rögzített kör íveinek hossza a középponti szögükkel arányos.*

- **Következmény:** *Az r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körív hossza $r\alpha$.*

6. Terület

A terület fogalmához is a kerület esetében már átgondolt „kétlépéses” megközelítéssel jutunk el: először sokszögek területét értelmezzük, majd azokat a síkidomokat, amelyeknek területet kívánunk tulajdonítani, sokszögekkel közelítjük meg, és a terület végül egyfajta határátmenet eredménye lesz. Ez az eljárás nehézkesebb, mint a kerület esetében: egyrészt már a sokszögek területe sem magától értetődő fogalom, másrészt azt sem könnyű tisztázni, hogy mely síkidomoknak létezik egyáltalán területe.

6.1 Sokszög területe

Korábbi tanulmányainkban sokszögön mindig egyszerű zárt töröttvonal által körülhatárolt síkrészt értettünk. Most ennél, vagyis az ún. egyszerű sokszög fogalmánál valamivel általánosabb sokszögfogalomra lesz szükség. A továbbiakban sokszögnek tekintjük a sík mindazon (nemüres) részhalmazait, amelyek előállnak véges sok egyszerű sokszög egyesítéseként. Jelöljük $\mathcal{S}$-sel a sík sokszögeinek halmazát. A terület fogalmától azt várjuk el, hogy minden sokszöghöz annak a területét, vagyis egy valós számot rendeljen. Ezért a sokszögek területe egy az $\mathcal{S}$ halmazon értelmezett valós értékű függvény lesz.

- **Definíció:** Egy $T : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ függvényt területmérő függvénynek nevezünk a sokszögek számára, ha:

  (1) pozitív, azaz minden $S \in \mathcal{S}$-re $T(S) > 0$,
  (2) egybevágóság-invariáns, azaz ha az $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ sokszögek egybevágók, akkor $T(S_1) = T(S_2)$, és
  (3) additív, azaz ha az $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ sokszögeknek nincs közös belső pontja, akkor $T(S_1 \cup S_2) = T(S_1) + T(S_2)$.

Megjegyzés: Az (1) és (3) követelmény felhasználásával könnyen következik, hogy $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, $S_1 \subseteq S_2$ esetén $T(S_1) \le T(S_2)$.

Nem világos, létezik-e egyáltalán területmérő függvény. Egy területmérő függvényt bármilyen pozitív számmal szorozva nyilván szintén területmérő függvényt kapunk, tehát az egyértelműség is kérdéses. Az alábbi tétel ezeket a kérdéseket kielégítően válaszolja meg. Teljes bizonyítása hosszadalmas és sok technikai részlet tisztázását igényli, ezért elhagyjuk.

- **Tétel:** *Létezik területmérő függvény, mégpedig pozitív skalárral való szorzás erejéig egyértelműen.*

Megjegyzések:
(1) Területmérő függvény létezését az alábbi konstrukciós eljárással lehet igazolni. A függvényértéket először háromszögeken értelmezzük mint egy oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatát. (Tisztázni kell – természetesen anélkül, hogy a terület fogalmára támaszkodnánk –, hogy ez a szorzat független attól, hogy a háromszög melyik oldalát választjuk.) Ezután egy tetszőleges sokszögön a függvényértéket úgy kapjuk, hogy a sokszöget földaraboljuk véges sok, páronként közös belső pont nélküli háromszög egyesítésére, és az ezeken külön-külön vett függvényértékeket összeadjuk. A nehézség egyrészt annak a tisztázásában áll, hogy ilyen földarabolás mindig lehetséges, másrészt abban, hogy a végül kapott összeg nem függ a földarabolás mikéntjétől.
(2) Az egyértelműségi állítás pontos jelentése az, hogy ha $T_1, T_2 : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ tetszőleges területmérő függvények, akkor létezik olyan $\lambda > 0$ szám, hogy $T_2 = \lambda \cdot T_1$. Ez nyilván azt vonja maga után, hogy a sokszögeken a területmérés egyértelművé válik azáltal, hogy a mértékegységet is rögzítjük.

- **Definíció:** A $T : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ területmérő függvényt területnek nevezzük, ha a fentieken túl az alábbi (4) követelményt is teljesíti:

(4) ha N egységnyi oldalú négyzet, akkor $T(N) = 1$.

A továbbiakban a t jelölést használjuk sokszögek területére, vagyis az (1) – (4) követelményeket teljesítő $\mathcal{S} \to \mathbf{R}$ függvényre. A fenti tétel alapján ezzel egyértelműen definiáltuk bármely S sokszögre annak $t(S)$ területét.

Bizonyos sokszögekre (háromszögre, parallelogrammára, trapézra, stb.) már az elemi geometriából is ismerünk területképleteket. A fenti tételt követő első megjegyzés alapján látható, hogy ezek valóban a most értelmezett terület értékét adják. Ugyancsak ebből a megjegyzésből vezethetjük le az alábbi tétel bizonyítását.

- **Tétel:** *Ha az S_1 és S_2 sokszögek hasonlók, és S_1-et λ arányú hasonlóság viszi S_2-be, akkor $t(S_2) = \lambda^2 \cdot t(S_1)$.*

6.2 Korlátos síkbeli ponthalmaz területe

- **Definíció:** Legyen H tetszőleges korlátos ponthalmaz a síkban. Ha nem létezik olyan S sokszög, melyre $S \subseteq H$, akkor legyen $t_*(H) = 0$, egyébként pedig legyen

$$t_*(H) = \sup\{t(S) : S \in \mathcal{S},\ S \subseteq H\} \quad \text{és} \quad t^*(H) = \inf\{t(S) : S \in \mathcal{S},\ H \subseteq S\}\,.$$

Vegyük észre, hogy a számhalmazok, amelyeknek a supremumát, illetve infimumát tekintjük, nem üresek és a megfelelő oldalról korlátosak, tehát $t_*(H)$ és $t^*(H)$ valós számok. Nyilvánvaló, hogy bármely H korlátos síkbeli ponthalmazra $t_*(H) \leq t^*(H)$ érvényes.

- **Definíció:** Azt mondjuk, hogy H-nak van területe, ha $t_*(H) = t^*(H)$. Ezt a közös értéket nevezzük H területének, és $t(H)$-val jelöljük.

Megjegyzés:
Ellenőriznünk kell, hogy sokszögek esetében ez a területdefiníció nincs ellentmondásban a sokszögekre vonatkozó, 6.1. szakaszbeli definícióval. Ha H sokszög, akkor maga H is szerepel a supremum, illetve infimum képzésében szerepet játszó sokszögek között, tehát ilyenkor maximumról, illetve minimumról van szó, amelyek egybeesnek. Ezért bármely sokszögnek van területe az iménti definíciónak az értelmében is, és az valóban megegyezik a 6.1-ben definiált területtel.

- **Példa:**

  Olyan korlátos síkbeli ponthalmazra mutatunk példát, amelynek nincs területe („racionális fésű”): legyen

  $$H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1, \text{ ha } y \geq 1/2, \text{ akkor } x \text{ racionális}\},$$

  ekkor $t_*(H) = 1/2$ és $t^*(H) = 1$.

Van viszont a síkidomoknak egy fontos osztálya, amelyben a terület garantáltan mindig létezik:

- **Tétel:** *Bármely konvex lemeznek van területe.*

A következő tétel megállapításait közvetlenül származtathatjuk a sokszögekre vonatkozó megfelelőikből:

- **Tétel:**
  - *A terület egybevágóság-invariáns, azaz ha H_1 és H_2 egybevágók és H_1-nek van területe, akkor H_2-nek is van, és $t(H_1) = t(H_2)$.*
  - *Ha a H_1 és H_2 hasonló ponthalmazok, H_1-et λ arányú hasonlóság viszi H_2-be, és H_1-nek van területe, akkor H_2-nek is van, és $t(H_2) = \lambda^2 \cdot t(H_1)$.*

A területre vonatkozó alábbi additivitási tulajdonság precíz levezetése nem könnyű, ezért (a sokszögek esetével fennálló szemléletes analógia alapján) bizonyítás nélkül fogadjuk el:

- **Tétel:** *Tegyük fel, hogy $H = H_1 \cup H_2$, ahol H_1-nek és H_2-nek nincs közös belső pontja. Ha a H_1, H_2 és H halmazok közül legalább kettőnek van területe, akkor a harmadiknak is van, és $t(H) = t(H_1) + t(H_2)$.*

6.3 Affinitás hatása a területre

Ha adott egy f affin transzformáció (akár a síkról önmagára, akár egy másik síkra), össze kívánjuk hasonlítani egy tetszőleges H síkidom területét a $H' = f(H)$ affin kép területével. Ezt először háromszögekre, majd sokszögekre, és végül tetszőleges, területtel bíró ponthalmazokra végezzük el.

- **Tétel:** *Legyen (Descartes-féle koordinátákat használva) az f affinitás algebrai alakja $f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{v}$. Ha a H ponthalmaznak van területe, akkor a H'-nek is van, és $t(H') = |\det M| \cdot t(H)$.*

- **Példák:**
  - Ha f egybevágóság, akkor M ortogonális mátrix, ezért $\det M = \pm 1$, és így a terület valóban nem változik.
  - Ha f λ arányú hasonlóság, akkor M egy ortogonális mátrix λ-szorosa, ezért $\det M = \pm\lambda^2$, és így a terület valóban λ^2-tel szorzódik.
  - Ha f λ arányú merőleges tengelyes affinitás, akkor alkalmas koordinátázással $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\det M = \lambda$, és ezért a terület $|\lambda|$-kel szorzódik.
  - Ha f nyírás, akkor alkalmas koordinátázással $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det M = 1$, és ezért nyírásnál a terület nem változik.
  - Ha f egy síknak egy vele φ szöget bezáró másik síkra történő merőleges vetítése, akkor alkalmas koordinátázással $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\det M = \cos\varphi$, és ezért ennél a vetítésnél az alakzatok területe $\cos\varphi$-vel szorzódik.

Megjegyzés:
A nyírás területtartó volta jól illusztrálja annak a jelenségnek a síkbeli változatát, amelyet „Cavalieri-elv” néven a térfogattal kapcsolatban fogunk megismerni. Ha a H_1, H_2 síkbeli ponthalmazoknak van területe, és található olyan egyenes a síkban, amellyel párhuzamos bármelyik egyenes H_1-et és H_2-t egyenlő hosszúságú szakaszokban metszi, akkor $t(H_1) = t(H_2)$.

6.4 Körlemez és körcikk területe

A körlemez konvex lemez, tehát van területe. Ha egy körcikk konvex (vagyis ha a hozzá tartozó középponti szög legfeljebb π), akkor szintén konvex lemez, és így ennek is van területe. Ha a körcikk konkáv, akkor földarabolható egy félkörlap és egy konvex körcikk egyesítésére, és így a 6.2. szakasz utolsó tétele alapján annak is van területe.

- **Tétel:**
  - *Az r sugarú körlap területe $r^2\pi$.*
  - *Ha az r sugarú körben egy körcikkhez α középponti szög tartozik, akkor a körcikk területe $\dfrac{r^2\,\alpha}{2}$.*

7. Térfogat és felszín

Az előző fejezetekben vizsgált fogalmak, a terület és a kerület térbeli megfelelőit vezetjük be. A definíciók alapelve azonos a kétdimenziós esettel, csak a menet közben tisztázandó technikai részletek bonyolultabbak a síkbelieknél. Ezért ezek részletezésétől általában eltekintünk. A térfogat- és felszínszámítás hatékony eszközeit a többváltozós analízis szolgáltatja majd.

7.1 A térfogat definíciója és tulajdonságai

A területfogalom kiépítésének mintájára a térfogat definíciója is két lépésre oszlik: először poliéderek térfogatát értelmezzük, majd a kétoldali megközelítés elvét alkalmazva ennek segítségével tisztázzuk, hogy mely térbeli ponthalmazoknak létezik térfogata, és adjuk meg ezek számára a térfogat definícióját.

Emlékeztetünk arra, hogy a konvex poliéder fogalmát már korábbi tanulmányainkban bevezettük. A továbbiakban poliédernek tekintjük a tér mindazon nemüres részhalmazait, amelyek előállnak véges sok konvex poliéder egyesítéseként.

Ha $\mathcal{P}$ jelöli a poliéderek halmazát, akkor térfogatmérő függvénynek nevezünk bármely olyan $\mathcal{P} \to \mathbf{R}$ függvényt, amely pozitív, egybevágóság-invariáns és additív (ugyanolyan értelemben, mint ahogyan azt a területmérő függvényektől megköveteltük). A térfogatmérő függvényekre is ugyanolyan alaptétel érvényes, mint síkban a területmérő függvényekre: pozitív skalárral való szorzás erejéig egyértelműen létezik térfogatmérő függvény. Ha még azt is megköveteljük, hogy az egységnyi élű kocka térfogata 1 legyen, akkor ezzel a térfogatmérő függvényt egyértelműen meghatároztuk, és a továbbiakban térfogatnak nevezzük. A térfogatot v-vel jelöljük, tehát egy P poliéder térfogata $v(P)$.

A definíció második lépésében a poliéderekre már megadott térfogat fogalmát kiterjesztjük általánosabb ponthalmazokra. Ha H tetszőleges korlátos ponthalmaz a térben, akkor a síkbeli eset mintájára értelmezzük a $v_*(H)$ és $v^*(H)$ számokat: ha H nem tartalmaz poliédert, akkor $v_*(H) = 0$, egyébként pedig

$$v_*(H) = \sup\{v(P) : P \in \mathcal{P},\ P \subseteq H\} \quad \text{és} \quad v^*(H) = \inf\{v(P) : P \in \mathcal{P},\ H \subseteq P\}.$$

Azt mondjuk, hogy H-nak van térfogata, ha $v_*(H) = v^*(H)$, és ezt a közös értéket tekintjük a H halmaz $v(H)$ térfogatának.

Nincs minden korlátos ponthalmaznak térfogata, a racionális fésűhöz hasonló térbeli konstrukcióval lehet ilyenre példát adni. Létezik viszont a térfogat alakzatoknak egy fontos típusa esetében, amely a konvex lemez fogalmának térbeli megfelelője:

- **Definíció:** Konvex testnek nevezzük azokat a korlátos, zárt, konvex halmazokat a térben, amelyeknek van belső pontja.
- **Tétel:** *Bármely konvex testnek van térfogata.*

Az alábbi tétel a térfogat olyan tulajdonságait foglalja össze, amelyek párhuzamba állíthatók a területre vonatkozó megállapításainkkal:

- **Tétel:**
  - *A térfogat egybevágóság-invariáns, azaz ha H_1 és H_2 egybevágók és H_1-nek van térfogata, akkor H_2-nek is van, és $v(H_1) = v(H_2)$.*
  - *Ha a H_1 és H_2 hasonló ponthalmazok, H_1-et λ arányú hasonlóság viszi H_2-be, és H_1-nek van térfogata, akkor H_2-nek is van, és $v(H_2) = \lambda^3 \cdot v(H_1)$.*
  - *Tegyük fel, hogy $H = H_1 \cup H_2$, ahol H_1-nek és H_2-nek nincs közös belső pontja. Ha a H_1, H_2 és H halmazok közül legalább kettőnek van térfogata, akkor a harmadiknak is van, és $v(H) = v(H_1) + v(H_2)$.*

7.2 Néhány konkrét test térfogata

Amikor a definícióból kiindulva szeretnénk bizonyos térfogatokat meghatározni, először poliéderek térfogatának ismeretére van szükségünk. A poliéderek néhány konkrét típusa esetében a térfogatra vonatkozó jól ismert formula a definícióból rövidebb-hosszabb úton (amelyet nem járunk végig) levezethető:

- bármely hasáb térfogata egyenlő az alapterület és a magasság szorzatával,
- bármely gúla térfogata egyenelő az alapterület és a magaság szorzatának harmadával.

A hasábokra vonatkozó képlet a parallelepipedon speciális esetében (a vektorok szorzására vonatkozó korábbi ismereteink alapján) egyenértékű módon úgy is fogalmazható, hogy a parallelepipedon térfogata a három független élvektor vegyes szorzatának az abszolút értékével egyenlő. Ezt felhasználva tudjuk belátni a térfogatnak az affinitásokkal szembeni viselkedéséről szóló alábbi tételt. A bizonyítás ugyanúgy végezhető, mint a területről szóló ugyanilyen síkbeli tétel esetében.

- **Tétel:** *Legyen egy f térbeli affinitás algebrai alakja Descartes-féle koordinátákat használva $f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{v}$. Ha a térbeli H ponthalmaznak van térfogata, akkor $H' = f(H)$-nak is van, és $v(H') = |\det M| \cdot v(H)$.*

A hasábokra és a gúlákra vonatkozó térfogatképletek határátmenet segítségével közvetlenül általánosíthatók hengerek és kúpok esetére is. A gömb térfogatának meghatározásához viszont újabb térfogatszámítási eszközre van szükségünk, mégpedig az ún. Cavalieri-féle elvre. A Cavalieri-elvet tétel formájában mondjuk ki. Bizonyítását, bár nem volna nehéz, elhagyjuk, mert a többváltozós integrálszámítás eszközeivel a tétel jóval elegánsabban és gyorsabban bebizonyítható, mint elemi úton.

- **Tétel (Cavalieri-elv):** *Legyenek H_1 és H_2 térbeli ponthalmazoknak. Tegyük fel, hogy*
  - *H_1-nek és H_2-nek létezik térfogata,*
  - *a tér valamely rögzített síkjával párhuzamos bármely S síkkal metszve $S \cap H_1$-nek is és $S \cap H_2$-nek is van területe, és*
  - *minden ilyen S-re $t(S \cap H_1) = t(S \cap H_2)$ teljesül.*

  Ekkor $v(H_1) = v(H_2)$.

A Cavalieri-elv leglátványosabb alkalmazása a gömb térfogatképletének levezetése.

- **Tétel:**

  Az r sugarú gömbtest térfogata $\dfrac{4\pi}{3} r^3$.

7.3 Felszín

A felszín fogalmának kialakításakor ugyanúgy járunk el, mint a kerület esetében a síkgeometriában: poliéderek felszínét választjuk kiindulásnak, továbbá eleve csak konvex testekre szorítkozunk, és csak ezeknek az esetében értelmezzük a felszínt.

- **Definíció:** Egy konvex poliéder felszínén a lapjai területének az összegét értjük. A továbbiakban a P konvex poliéder felszínét $a(P)$-vel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy egybevágó konvex poliéderek felszíne egyenlő, valamint hogy ha egy konvex poliédert λ arányú hasonlóság visz egy másikba, akkor a második poliéder felszíne az első felszínének a λ^2-szerese. A következő tétel szerint konvex poliéderekre érvényes a kerület monotonitási tulajdonsága:

- **Tétel:** *Ha a P_1 és P_2 konvex poliéderekre $P_1 \subseteq P_2$ fennáll, akkor $a(P_1) \leq a(P_2)$.*

A tétel bizonyítását ugyanolyan indukciós úton lehet elvégezni, mint a sokszögek kerületének monotonitására vonatkozó síkbeli tétel esetében. A kerületre vonatkozó bizonyítás lényegi eleme volt a töröttvonalakra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség, amelynek a térbeli megfelelőjére van most szükség. Ezt szolgáltatja az alábbi segédtétel.

- **Lemma:** *Konvex poliéderben bármelyik lap területe kisebb, mint a többi lap területének az összege.*

Megjegyzés: ugyanúgy, mint síkban a kerület esetében, nem volna szükséges a konvexitást feltenni sem a tételben P_2-ről, sem pedig a lemmában.

A felszín fogalmát konvex poliéderekről konvex testekre ugyanolyan módszerrel terjesztjük ki, mint amilyent a kerület esetében használtunk:

- **Definíció:** A K konvex test felszínén a K által tartalmazott konvex poliéderek felszínének a felső határát értjük. Formulával:

  $$a(K) = \sup \{a(P) : P \text{ konvex poliéder}, P \subseteq K\} .$$

  Ha K maga is konvex poliéder, akkor $a(K)$ is szerepel a definícióban tekintett számhalmaz elemei között, ezért a monotonitási tulajdonság figyelembe vételével $a(K)$ a legnagyobb elem (vagyis ilyenkor supremum helyett maximum is mondható). Emiatt konvex poliéderek esetében a konvex testre vonatkozó felszín-definíció az eredeti, poliéderre vonatkozó definíciót adja vissza.

Az alábbi tétel a konvex testek felszínének olyan tulajdonságait állapítja meg, amelyek a monotonitási tételt felhasználva a definícióból közvetlenül következnek.

- **Tétel:**
  - *Bármely K konvex testre $0 < a(K) < +\infty$ teljesül.*
  - *Ha K_1, K_2 konvex testek és $K_1 \subseteq K_2$, akkor $a(K_1) \leq a(K_2)$.*

A következő tétel a felszín egyes transzformációkkal szembeni viselkedését tisztázza.

- **Tétel:**
  - *Ha a K_1 és K_2 konvex testek egybevágók, akkor* $a(K_1) = a(K_2)$.
  - *Ha a K_1 és K_2 konvex testek hasonlók, és K_1-et λ arányú hasonlóság viszi K_2-be, akkor* $a(K_2) = \lambda^2 \cdot a(K_1)$.

(Csakúgy, mint a kerület esetében, affinitásokról semmi hasonlót nem lehet mondani.)

Végül a teljesség kedvéért ismertetjük a gömb, illetve a gömböv felszínére vonatkozó képleteket. Lehetséges volna ezek levezetése konvex poliéderekkel történő közelítéssel elemi úton, de ezt nem járjuk végig, mert ezekhez az eredményekhez majd az integrálszámítás gyorsabb és elegánsabb módszerrel vezet el.

- **Tétel:**

  Az r sugarú gömb felszíne $4\pi r^2$.

- **Definíció:** Gömbrétegnek nevezzük a gömbtestnek két olyan párhuzamos sík közé eső részét, amelyek belemetszenek a gömbbe. A gömbréteg konvex test, amelynek a határát két körlap és a gömbfelületnek a síkok közé eső része alkotja. Ezt az utóbbi felületet gömbövnek nevezzük. A gömböv felszínén azt a számot értjük, amely a gömbréteg felszínéből a két körlap területének kivonásával keletkezik. A gömbréteg és a gömböv magasságán a két sík távolságát értjük.

- **Tétel:**

  Az r sugarú gömbön bármely m magasságú gömböv felszíne $2rm\pi$.