BEVEZETÉS A GEOMETRIÁBA

előadásvázlat

Moussong Gábor, 2022.

1. Alapfogalmak

1.1 Térelemek, illeszkedés

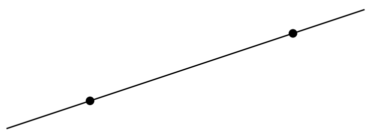
Az euklideszi térgeometria alkotóelemei: tér, pontok, egyenesek, síkok.
Ezeket a fogalmakat nem definiáljuk. Tulajdonságaikon keresztül határozzuk meg őket.
A tér az euklideszi geometria alaphalmaza, a pontok az alaphalmaz elemei, az egyenesek és a síkok az alaphalmaz bizonyos részhalmazai.

(Általánosságban: a geometriai alakzatok a tér részhalmazai.)

Szóhasználat: a térelemek között fennálló tartalmazást geometriai nyelven illeszkedésnek mondjuk.
Például:
– a P pont illeszkedik az e egyenesre (vagy e illeszkedik P-re), ha $P \in e$;
– az f egyenes illeszkedik az S síkra (vagy S illeszkedik f-re), ha $f \subset S$.

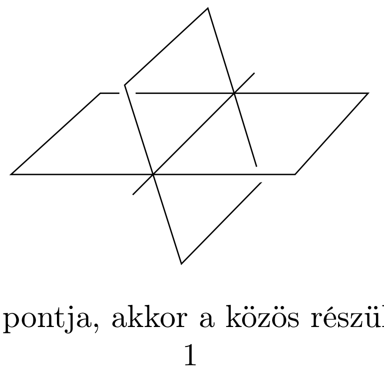
Pontok egy rendszerét kollineárisnak mondjuk, ha a pontok egy egyenesre illeszkednek.

Néhány jellegzetes illeszkedési tulajdonság:



– Bármely két különböző ponthoz egyértelműen létezik rájuk illeszkedő egyenes.

– Bármely három nem kollineáris ponthoz egyértelműen létezik rájuk illeszkedő sík.



– Ha két síknak van közös pontja, akkor a közös részük egyenes.

1.2 Felbontási (rendezési) tulajdonságok

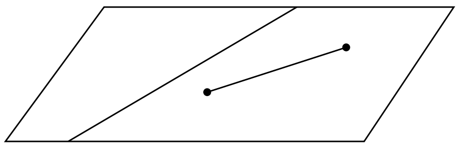
Az egyenest bármely pontja két félegyenesre bontja,

a félegyenest bármely, a végpontjától különböző pontja egy szakaszra és egy félegyenesre bontja,

a szakaszt bármely, a végpontjaitól különböző pontja két részszakaszra bontja.

A síkot bármely benne fekvő egyenes két félsíkra, a teret bármely sík két féltérre bontja.

Beszélhetünk zárt vagy nyílt félegyenesről, szakaszról, félsíkról vagy féltérről aszerint, hogy a határt hozzávesszük-e vagy nem.
(Megállapodás: jelző nélkül zártnak értjük.)



Két pont akkor és csak akkor tartozik ugyanahhoz a nyílt félegyeneshez (nyílt félsíkhoz, illetve nyílt féltérhez), ha az őket összekötő szakasz diszjunkt az elválasztó ponttól (egyenestől, illetve síktól).

1.3 Konvexitás

Jelölés:

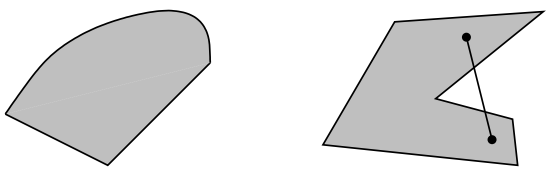
Ha A és B a tér tetszőleges két különböző pontja, akkor az A, B végpontú szakaszt az $[A, B]$ jellel jelöljük.

(Tehát $[A, B]$ az a ponthalmaz, amely A-ból, B-ből, és az egyenesükön A és B között elhelyezkedő összes pontból áll.)

Kiterjesztjük a jelölést arra az esetre is, amikor $A = B$, ekkor $[A, A] = \{A\}$ egyelemű halmaz. (Ilyenkor „elfajuló” szakaszról szokás beszélni.)

- **Definíció:** Legyen K térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy K konvex, ha bármely $A, B \in K$-ra $[A, B] \subseteq K$ teljesül.

Egy halmaz tehát akkor és csak akkor konvex, ha bármely két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazza:



konvex nem konvex

Példák konvex halmazokra:
– az egész tér;
– sík, egyenes;
– féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
– az egypontú halmazok (a kétpontú halmazok nem konvexek; észrevétel: ha egy véges ponthalmaznak legalább két eleme van, akkor nem lehet konvex);
– az üres halmaz;
– háromszög(lemez), parallelogramma, trapéz, körlemez;
– egy négyszög akkor és csak akkor konvex, ha átlószakaszai metszik egymást;
– tetraéder, háromoldalú hasáb, téglatest;
– gömb, forgáshenger, forgáskúp (mint testek).

- **Állítás:** *Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.*

Megjegyzés:
A „tetszőleges rendszer” kifejezés arra utal, hogy nem csak két konvex halmaz metszetéről állítjuk, hogy konvex, hanem akárhány (jellemzően végtelen sok) halmaz is lehet, amelyek közös részét vizsgáljuk. Ezt később, a konvex burok előállításánál ki is fogjuk használni.

Bizonyítás:
Legyen $i \in I$-re K_i konvex ponthalmaz (ahol I tetszőleges indexhalmaz). Belátjuk, hogy a $K = \cap_{i \in I} K_i$ metszethalmaz is konvex.
Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$. Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.
Legyen $i \in I$ tetszőleges; ekkor $K \subseteq K_i$ miatt $A, B \in K_i$, és így K_i konvexitása miatt valóban $[A, B] \subseteq K_i$.

- **Definíció:** Legyen H térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy egy K ponthalmaz a H konvex burka, ha az alábbi három követelmény mindegyike teljesül:
(i) K konvex,
(ii) $H \subseteq K$,
(iii) ha L konvex halmaz és $H \subseteq L$, akkor $K \subseteq L$.

A harmadik követelmény azt írja elő, hogy a konvex burok szűkebb legyen minden lefedő konvex halmaznál. Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

A definíció nem „adja meg” a halmazok konvex burkát, hanem csak követelményeket támaszt a konvex burokkal szemben, és arról nem szól, hogy vajon létezik-e bármely halmaznak konvex burka, illetve hogy az egyértelmű-e. Ezt még tisztáznunk kell:

- **Tétel:** *Bármely ponthalmaznak egyértelműen létezik konvex burka.*

Bizonyítás:
Adott a H ponthalmaz, tekintsük a H-t tartalmazó összes konvex halmaz metszetét:
$$K = \bigcap \{ L \,:\, L \text{ konvex}, \; H \subseteq L \}.$$

Állítjuk, hogy ez a K halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:
(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.
(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

(iii): Ha L konvex és $H \subseteq L$, akkor L egyike a metszendő halmazoknak, és ezért a metszet szűkebb nála: $K \subseteq L$.

Tisztázni kell még a konvex burok egyértelműségét. Tegyük fel, hogy H-nak K_1 is és K_2 is konvex burka. Ekkor a definícióbeli (iii) tulajdonságot $K = K_1$, $L = K_2$ szereposztással alkalmazva $K_1 \subseteq K_2$ következik, majd a fordított $K = K_2$, $L = K_1$ szereposztással $K_2 \subseteq K_1$ adódik. Tehát $K_1 = K_2$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Példák ponthalmazok konvex burkára:
– Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
– Két pont konvex burka: szakasz.
– Három nem kollineáris pont konvex burka: háromszög.
– Négy nem egysíkú pont konvex burka: tetraéder.
– Körvonal konvex burka: körlemez.

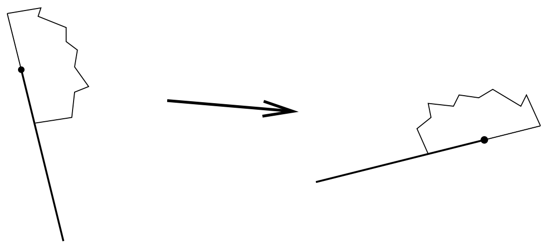
1.4 A tér mozgásai

A tér „mindenütt egyforma”, azaz a térbeli idomok szabadon mozgathatók. A mozgás fogalmát nem definiáljuk, hanem olyan alapfogalomnak tekintjük, amelyre fontos geometriai definíciókat (pl. távolság, szög, egybevágóság) tudunk építeni.

A mozgásokat úgy fogjuk föl, hogy az egész tér mozdul el és magával viszi a vizsgált alakzatot.

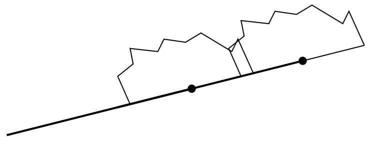
Egy mozgás vizsgálatakor csak a kiinduló és a végső helyzetet hasonlítjuk össze; azzal nem törődünk, hogy milyen utat járunk be a mozgás fizikai végrehajtása során.

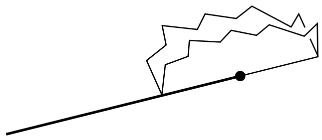
Bármely pontból bármely pontba eljuthatunk alkalmas mozgással. Sőt, azt is előre megszabhatjuk, hogy bizonyos térbeli irányok milyen irányokba mozduljanak el. Ennek a követelménynek a matematikai megfogalmazását szolgálja az ún. „zászló” fogalma:



Zászlónak nevezünk egy olyan alakzatot, amely egy félsíkból és a határán kijelölt félegyenesből áll. Bármely két zászlóhoz egy és csak egy olyan mozgás létezik, amely az első zászlót a másodikba viszi.

Példák:
– Ha a két zászlóhoz tartozó félsík ugyanaz, és az egyik félegyenes tartalmazza a másikat, akkor a zászlók által megadott mozgás: eltolás.





– Ha a két zászlóhoz tartozó félegyenes ugyanaz, akkor a zászlók által megadott mozgás: forgatás egyenes körül.

1.5 Távolság

Két szakasz egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.

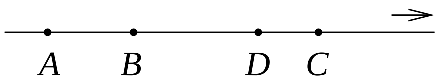
Szakaszok hosszát (= pontpárok távolságát) nemnegatív valós számokkal mérjük. Az AB szakasz hosszát $d(A, B)$-vel, $\overline{AB}$-vel, vagy AB-vel jelölhetjük.
Nyilván $d(B, A) = d(A, B)$.

A távolságmérés meghatározó tulajdonságai:

– Bármely P pontra $d(P, P) = 0$ („nullszakasz” hossza 0).
– Egybevágó szakaszok hossza egyenlő;
– Ha az AC szakaszt a B pont két részszakaszra osztja, akkor $AB + BC = AC$;
– Tetszőlegesen adott $d \geq 0$ valós számhoz bármely O kezdőpontú félegyenesen egyértelműen létezik olyan A pont, hogy $OA = d$.

Ha csak egy egyenesen fekvő pontokra, illetve szakaszokra szorítkozunk, akkor előjeles távolságmérést is bevezethetünk. Ilyenkor irányított szakaszokat használunk: tekintettel vagyunk a szakasz végpontjainak a sorrendjére is.

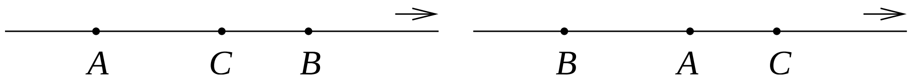
Ha egy egyenes két lehetséges irányítása közül az egyiket rögzítjük és pozitívnak tekintjük, akkor az egyenesen fekvő irányított szakaszok hosszát előjellel láthatjuk el:



itt $AB > 0$ és $CD < 0$. (Persze $BA = -AB$.)

Megjegyzés: az előjeles távolság jelölésére csak AB-t vagy $\overline{AB}$-t használjuk; a $d(A, B)$ jelölés mindig a szokásos (előjel nélküli) távolságra vonatkozik.

Előjeles távolságok használatával az $AB + BC = AC$ képlet az egyenes bármely három pontjára, azok tetszőleges sorrendje esetén is érvényes:

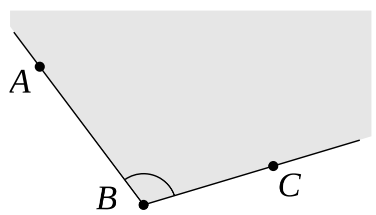


Ha egy egyenesen megadunk egy irányítást, felveszünk egy kezdőpontot, és rögzítjük a távolságegységet, akkor az irányított távolságmérés az egyenest a jól ismert $\mathbf{R}$ valós számegyenessel azonosítja.

1.6 Szög, szögmérték, forgásszög

Szögvonal: közös csúcsú két félegyenes egyesítése.
Bármely szögvonal a síkot két részre vágja.
Szögtartomány (vagy szög): az egyik (bármelyik) résztartomány (a határvonalával együtt).

Két szög egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.
Szögek nagyságát pozitív valós számokkal mérjük (szögmérték).
Az ABC szög mértékét $ABC\sphericalangle$-gel vagy $B\sphericalangle$-gel jelöljük. Nyilván $CBA\sphericalangle = ABC\sphericalangle$.



A szögmérés meghatározó tulajdonságai:

– Egybevágó szögek mértéke egyenlő;
– Ha egy szöget a csúcsából induló félegyenes két részszögre bont, akkor a mértéke a részszögek mértékeinek az összege.
– Bármely szög egy adott, nála nagyobb szögtartományban bármelyik szögszártól kiindulva egyértelműen fölmérhető.

Speciális szögek:

egyenesszög (mértéke π vagy $180°$),
derékszög (mértéke $\pi/2$ vagy $90°$), (a merőlegesség jele: $\perp$),
hegyesszög (derékszögnél kisebb),
tompaszög (derékszögnél nagyobb, egyenesszögnél kisebb),
konvex szög (mértéke $\leq \pi$),
konkáv szög (mértéke $> \pi$),
megállapodás: nullszög (0), teljesszög (2π).

Metsző egyenesek hajlásszöge: mindig $\leq \pi/2$.

Egy síkon fekvő szögekre szorítkozva előjeles szögekkel is számolhatunk. Ebben a sík irányítására kell támaszkodnunk. A síkon irányítást adunk meg azáltal, hogy a két lehetséges síkbeli forgásirány egyikét kiválasztjuk és pozitívnak tekintjük.

Megjegyzés: ábráinkon szokás szerint az óra járásával ellentétes forgásirány a pozitív. A papír túloldala felől nézve éppen fordított a helyzet!

Ha az irányított síkon két közös kezdőpontú félegyenes sorrendje is adott, akkor az ezekhez tartozó forgásszög (vagy előjeles szög): annak a szögelfordulásnak a mértéke (a forgásirány előjelét is tekintetbe vébe), amellyel az első félegyenesből a másodikba jutunk.

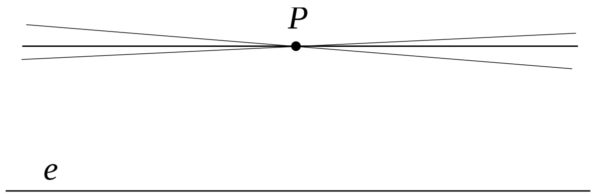
A forgásszög tetszőleges valós szám lehet, és csak modulo 2π van meghatározva.
Például $\pi/2$ és $-(3/2)\pi$ (illetve $90°$ és $-270°$) ugyanazt a forgásszöget jelöli.
Megállapodás: ha $AOB\sphericalangle$ irányított szöget jelöl, akkor mindig OA a sorrendben az első, OB a második félegyenes.

Előjeles szögekkel számolva a közös kezdőpontú OA, OB és OC félegyenesek elhelyezkedésétől függetlenül mindig érvényben van az $AOB\sphericalangle + BOC\sphericalangle = AOC\sphericalangle$ összefüggés.

1.7 Párhuzamosság

Párhuzamossági axióma:

Ha a P pont nem illeszkedik az e egyenesre, akkor az általuk meghatározott síkban csak egy olyan a P pontot tartalmazó egyenes létezik, amely e-t nem metszi.



Azt mondjuk, hogy két egyenes párhuzamos, ha vagy megegyeznek, vagy pedig egy síkba esnek és nincs közös pontjuk.
(A párhuzamosság jele: $\|$)

Két félegyenesről azt mondjuk, hogy egyirányúak, ha vagy az egyik tartalmazza a másikat, vagy pedig különböző párhuzamos egyeneseken fekszenek és a kezdőpontjaik egyenese nem választja el őket. Ha párhuzamosak és nem egyirányúak, akkor ellentétes irányúnak mondjuk a félegyeneseket.

A párhuzamosság és az egyirányúság tranzitív reláció, azaz:
Ha két egyenes (félegyenes) párhuzamos (egyirányú) egy harmadikkal, akkor egymással is párhuzamosak (egyirányúak).

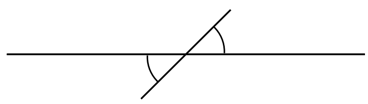
Párhuzamos szárú szögek:

Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

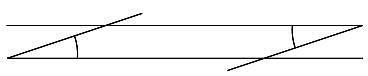
(Megjegyzések: A tétel térbeli szögekre is vonatkozik. Fel kell tenni, hogy konvex szögekről van szó. Találjunk ellenpéldát a nem feltétlenül konvex szögek körében!)

Példák:

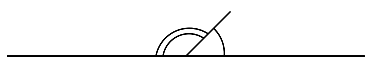
egyállású szögek (egyenlők)



csúcsszögek (egyenlők)



váltószögek (egyenlők)



mellékszögek (kiegészítő szögek)

2. Térelemek kölcsönös helyzete, szöge, távolsága

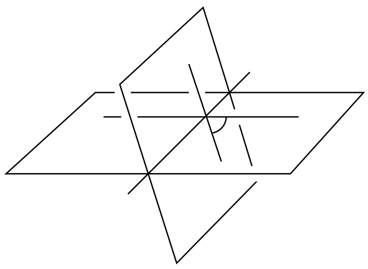
2.1 Két sík

• Két sík párhuzamos, ha megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk.

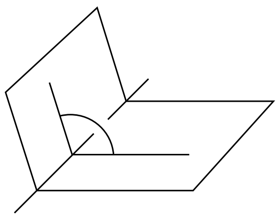
Fontosabb tulajdonságok:

– Adott ponton át egyértelműen fektethető adott síkkal párhuzamos sík.
– A párhuzamosság a síkok körében is tranzitív reláció.
– Ha egy egyenes két párhuzamos sík egyikét döfi, akkor a másik síkot is döfi.
– Ha egy sík két párhuzamos sík egyikét metszi, akkor a másik síkot is metszi, és a két metszésvonal párhuzamos.

• Metsző síkok:



A két sík hajlásszögén a metszésvonal valamely pontjában a síkokban a metszésvonalra állított merőleges egyenesek hajlásszögét értjük. Ez a szög mindig $\leq \pi/2$. Két közös határegyenesű félsík a teret két lapszögtartományra (vagy lapszögre) bontja. Ennek mértékét így határozzuk meg:



A metszésvonal valamely pontjában a félsíkokon belül egy-egy merőleges félegyenest állítunk. Ezeknek azt a szögét tekintjük, amely a lapszögtartományba esik. Ez a szög lehet tompa vagy akár konkáv is.

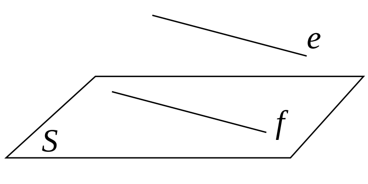
A definíciók korrektek: a mondott szögek nem függnek a metszésvonal pontjának megválasztásától. (Egyállású szögek.)

2.2 Egyenes és sík

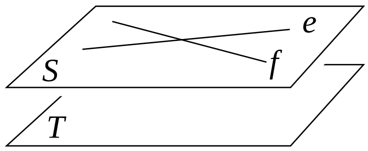
• Egyenes és sík párhuzamossága:

Az e egyenes és az S sík párhuzamos, ha $e \subset S$, vagy $S \cap e = \emptyset$.

Fontosabb tulajdonságok:



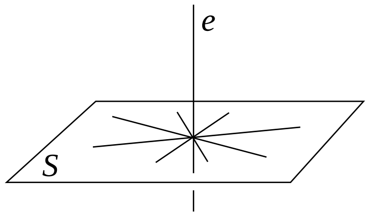
– Akkor és csak akkor áll fenn $e \parallel S$, ha létezik olyan $f \subset S$ egyenes, hogy $e \parallel f$.



– Ha S és T síkok, $e, f \subset S$ metsző egyenesek, $e \parallel T$ és $f \parallel T$, akkor $S \parallel T$.

• Egyenes és sík merőlegessége:

Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspontton átmenő összes S-beli egyenesre.



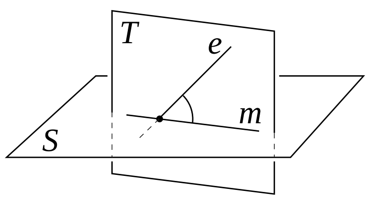
Fontosabb tulajdonságok:

– Ha e merőleges két különböző, a döféspontton átmenő S-beli egyenesre, akkor $e \perp S$.
– Egy e egyenesre valamely rögzített pontjában állított merőleges egyenesek síkot alkotnak, amely merőleges az e egyenesre.
– Ha $e \perp S$, $e \parallel e'$ és $S \parallel S'$, akkor $e' \perp S'$.
– Ha $e \perp S$ és $e' \perp S$, akkor $e \parallel e'$.
– Ha $e \perp S$ és $e \perp S'$, akkor $S \parallel S'$.
– Adott S síkhoz és adott P ponthoz egyetlen olyan e egyenes található, hogy $P \in e$ és $e \perp S$.
– Adott e egyeneshez és adott P ponthoz egyetlen olyan S sík található, hogy $P \in S$ és $e \perp S$.
– Ha S_1 és S_2 metsző síkok, $e = S_1 \cap S_2$, $S_1 \perp S$ és $S_2 \perp S$, akkor $e \perp S$.

• Egyenes és sík hajlásszöge:

Ha az e egyenes merőleges az S síkra, akkor a hajlásszögük $\pi/2$.

Ha nem:



Egyetlen olyan T sík létezik, amelyre $e \subset T$ és $T \perp S$. Jelölje m az S és T síkok metszésvonalát. Az e és S hajlásszögén e és m hajlásszögét értjük.

Észrevételek:

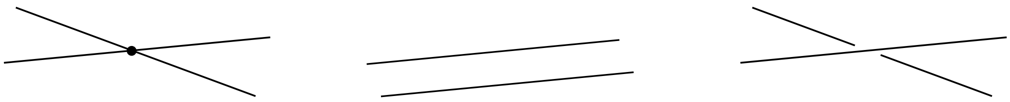
– m az e merőleges vetülete S-en;
– e és S hajlásszöge a lehető legkisebb az olyan szögek között, amelyeket e zár be az S-ben fekvő, a döféspontton áthaladó egyenesekkel.

2.3 Két egyenes

• Két egyenes kölcsönös helyzete a térben:

Három lehetőség:

metsző, párhuzamos, sem metsző, sem párhuzamos: kitérő.



Két egyenes akkor és csak akkor kitérő, ha nincs egy síkban.

Kitérő egyenesek szöge:

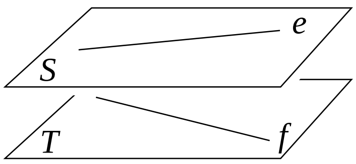
Adottak az e és f kitérő egyenesek.

A tér egy tetszőleges P pontján át húzzunk velük párhuzamos egyeneseket: e' és f'. Az e és f egyenesek szögén az e' és f' metsző egyenesek hajlásszögét értjük.

A definíció korrektségéhez: e' és f' hajlásszöge nem függ a P pont megválasztásától (egyállású szögek).

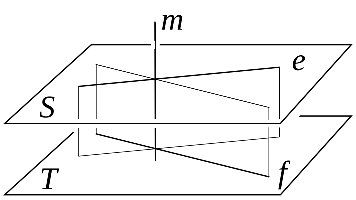
• Normáltranszverzális:

A kitérő egyenesek fontos illeszkedési tulajdonsága:



Ha e és f kitérő egyenesek, akkor egyértelműen találhatók őket tartalmazó párhuzamos síkok: $S \supset e$, $T \supset f$, $S \parallel T$.

Az S-re és T-re merőleges egyenesek közül pontosan egy metszi e-t is és f-et is:



Ez az m egyenes az e-t tartalmazó, T-re merőleges sík és az f-et tartalmazó, S-re merőleges sík metszésvonala.

Az m egyenes neve: e és f normáltranszverzálisa. Ez az egyetlen olyan egyenes, amely e-t is és f-et is merőlegesen metszi.

2.4 Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:
– a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.
Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík között:
– az egyik egyenes (sík) bármelyik pontjának a távolsága a másik egyenestől (síktól). Ez független a pont választásától.
Sík és vele párhuzamos egyenes között:
– az egyenes bármelyik pontjának a távolsága a síktól. Ez független a pont választásától.
Két kitérő egyenes között:
– a normáltranszverzális szakasz hossza.

Mindegyik esetben a távolság a két idom pontjai közt fellépő összes lehetséges távolság minimuma.

3. Szimmetriák és transzformációk

3.1 Eltolás és párhuzamosság

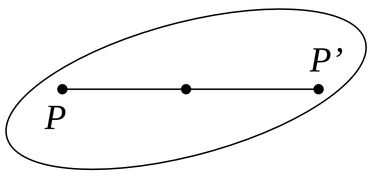
Bármely eltolás
– bármely egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz,
– bármely síkot vele párhuzamos síkba visz,
– bármely félegyenest vele egyirányú félegyenesbe visz.

Ha A és B tetszőleges pontok és valamely eltolásnál az A pont képe az A' pont, a B pont képe a B' pont, akkor $d(A, A') = d(B, B')$, továbbá az AA' és BB' félegyenesek egyirányúak.

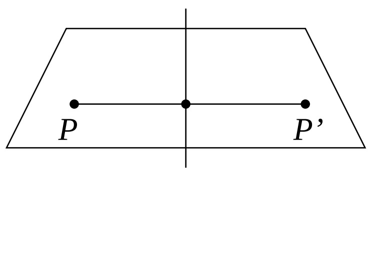
A tér bármely P és P' pontjához egyértelműen létezik olyan eltolás, amely P-t P'-be viszi.

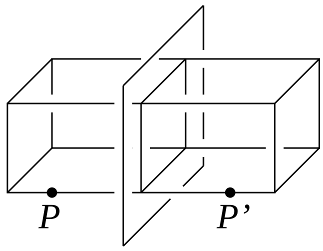
3.2 Tükrözés, középpontos és tengelyes szimmetria

Középpontosan szimmetrikus alakzat (akár síkban, akár térben): alkalmas középpontos tükrözés önmagába viszi.



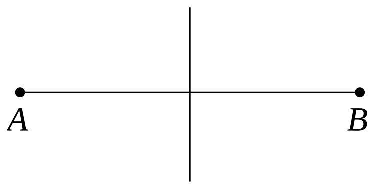
Tengelyesen szimmetrikus alakzat (síkban): alkalmas tengelyes tükrözés önmagába viszi.



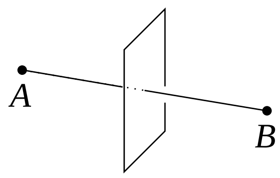


Síkra szimmetrikus alakzat (térben): alkalmas síkra vonatkozó tükrözés önmagába viszi.
Megjegyzés: a síkra vonatkozó tükrözés nem mozgás.

• Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P, A) = d(P, B)$ fennáll:



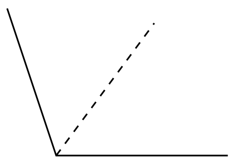
síkban: egyenes
(szakaszfelező merőleges),

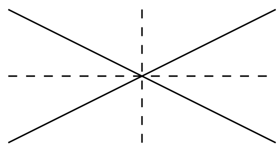


térben: sík
(szakaszfelező merőleges sík).

A szakaszfelező merőleges az egyetlen olyan egyenes, illetve sík, amelyre vonatkozó tükrözés A-t és B-t felcseréli.

• Síkban:





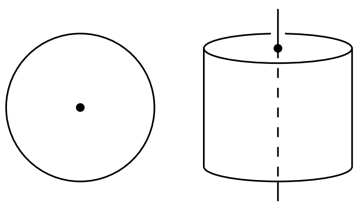
Adott konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félegyenes. Két metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a két szögfelező egyenes egyesítése. Az ezekre vonatkozó tükrözések felcserélik a két egyenest.

• Térben:

Adott konvex lapszögtartományban a lapoktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félsík. Két metsző síktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a két szögfelező sík egyesítése. Az ezekre vonatkozó tükrözések felcserélik a két síkot.

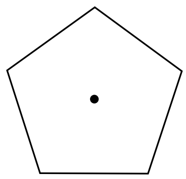
3.3 Forgásszimmetria

Forgásszimmetrikus egy alakzat, ha síkban alkalmas pont, illetve térben alkalmas tengely körüli összes forgatás önmagába viszi.



Például síkban a kör, térben a forgástestek forgásszimmetrikusak.

Egy alakzat n-edrendben forgásszimmetrikus (síkban pont körül, térben egyenes körül), ha alkalmas pont (illetve tengely) körüli $2\pi/n$ szögű forgatás önmagába viszi.



3.4 Egybevágóság, hasonlóság

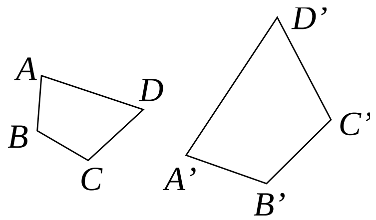
Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága: bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

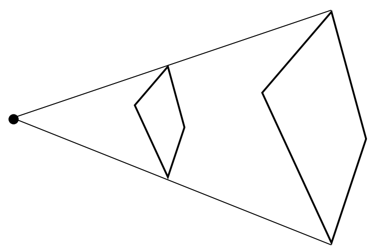
Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra, léteznek rajtuk kívül más egybevágósági transzformációk is. Bármely mozgás egybevágóság, de nem minden egybevágóság mozgás.

Hasonlóság, nagyítás:



Hasonló alakzatok megfelelő távolságadatai arányosak, megfelelő szögei egyenlők. (Ha az arányossági tényező 1, akkor egybevágóságról van szó.)

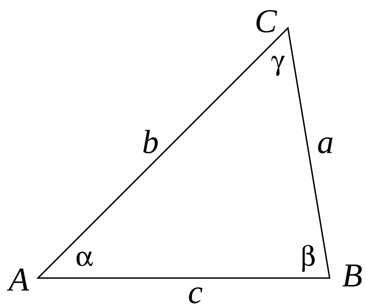


A középpontos nagyítás minden alakzatot hasonló alakzatba visz. Bármely egyenes képe vele párhuzamos egyenes, bármely szög képe egyállású szög. Tetszőleges pozitív valós szám előírható mint nagyítási arány.

4. Fontosabb alakzatok

4.1 Háromszög

- Háromszög (háromszöglemez): három nem kollineáris pont konvex burka. (Azaz: a páronkénti összekötő szakaszok által körülhatárolt síkrész.)



Szokásos jelölések és elnevezések:

A, B, C: csúcsok,
a, b, c: oldalak (oldalszakaszok, oldalegyenesek),
α, β, γ: szögek (belső szögek).

- Összehasonlítási tulajdonságok:
  - nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van: $\alpha < \beta \iff a < b$;
  - az egyenlő szárú háromszög esete: $\alpha = \beta \iff a = b$;
  - háromszög-egyenlőtlenség: $a < b + c$;
  - általánosságban: a tér bármely három pontjára $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$, és itt egyenlőség csak akkor áll, ha B az AC szakaszra esik;
  - szögösszeg: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$;
    (átfogalmazva:) bármely külső szög a nem mellette fekvő két belső szög összegével egyenlő.

- Az egybevágóság és a hasonlóság feltételei:

  Két háromszög egybevágóságához elegendő:
  - ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
  - két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy
  - egy oldal és a rajta fekvő szögek rendre egyenlők, vagy
  - két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög rendre egyenlő.

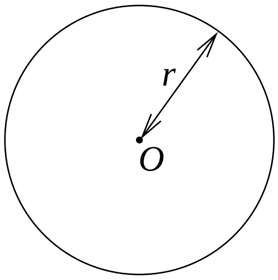
  Két háromszög hasonlóságához elegendő:
  - ha az oldalak aránya egyenlő, vagy
  - két oldal aránya és a közrefogott szög egyenlő, vagy
  - két szög páronként egyenlő, vagy
  - két oldal aránya és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő.

4.2 Kör

- Kör: rögzített ponttól adott pozitív távolságra levő pontok mértani helye a síkban.

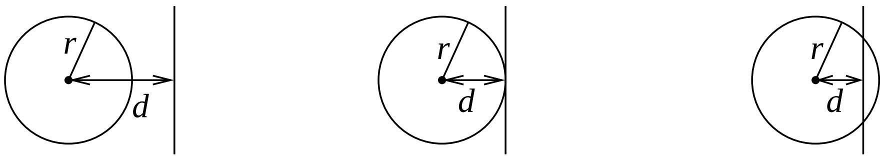
Szokásos jelölések és elnevezések:

O: középpont, r: sugár,
P belső pont, ha $d(P,O) < r$, külső, ha $d(P,O) > r$.



Figyelem: a „kör” szó a körvonalat jelenti a matematikában. Ha a kör belsejéből és a körvonalból együttesen álló alakzatot akarjuk megnevezni, akkor körlemezt vagy körlapot mondunk.

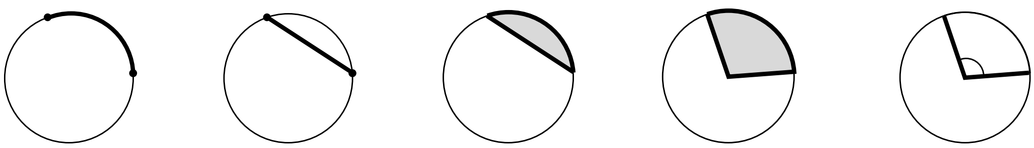
- Kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkban:



$r < d$:	$r = d$:	$r > d$:
nincs közös pont;	egyetlen közös pont van (az egyenes: érintő);	két közös pont van (az egyenes: szelő).

Az érintő merőleges a közös pontban húzott sugárra.

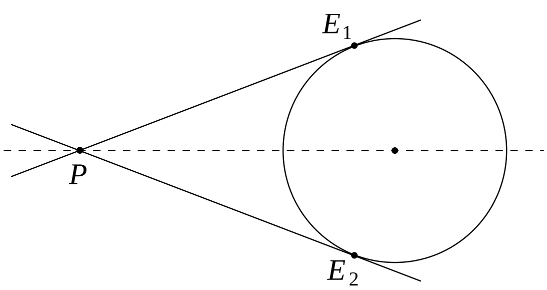
- Néhány további elnevezés:



körív húr körszelet körcikk középponti szög

Egyenlő (azaz egybevágó) ívekhez egyenlő húrok, egyenlő középponti szögek, egybevágó körcikkek és egybevágó körszeletek tartoznak (indoklás: forgásszimmetria).

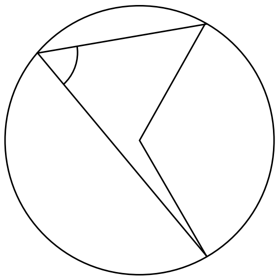
- Érintők:



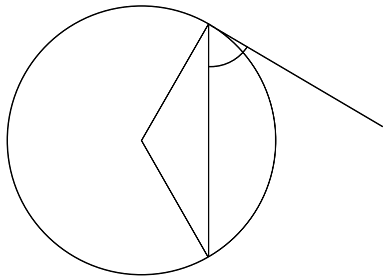
Az érintők száma:

– A kör bármely pontjában egyértelműen létezik érintő.
– A kör belső pontján át nincsen érintő.
– Bármely külső ponton át két érintő húzható; a két érintőszakasz egyenlő (tengelyes szimmetria).

- Kerületi szögek:



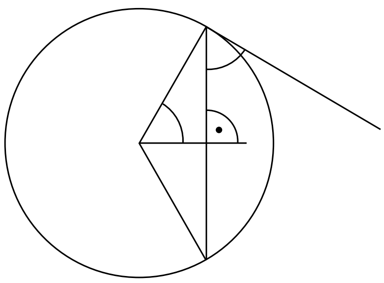
kerületi szög

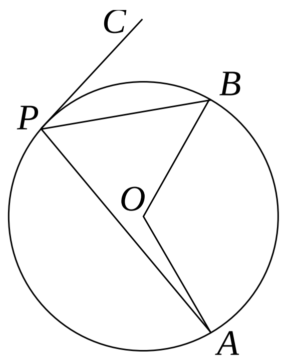


érintőszárú kerületi szög

- **Tétel:** *Bármely kerületi szög fele az ugyanakkora ívhez tartozó középponti szögnek.*

Bizonyítás:





Először az érintőszárú esetben: merőleges szárú szögek (mindkettő egyformán hegyes-, derék- vagy tompaszög).

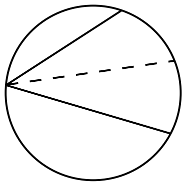
Általános eset: a P-nél levő kerületi szög két érintőszárú kerületi szög különbsége:

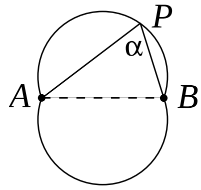
$$AOB\sphericalangle = AOP\sphericalangle - BOP\sphericalangle = 2 \cdot APC\sphericalangle - 2 \cdot BPC\sphericalangle = 2 \cdot APB\sphericalangle$$

(Figyelem: itt $AOP\sphericalangle$ a B-t tartalmazó szöget jelöli!)

- Következmények:

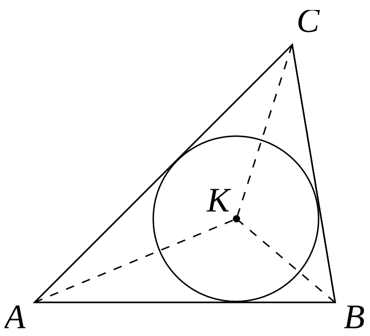
Ugyanabban a körben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak.
Például: a kerületi szög szögfelezője felezi az ívet.

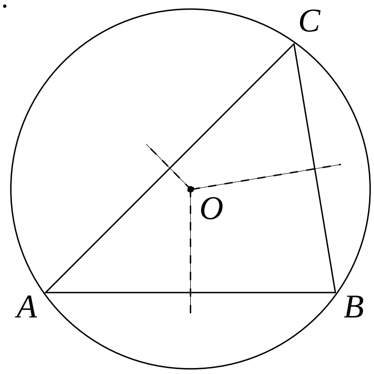


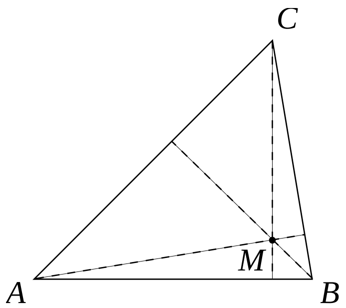


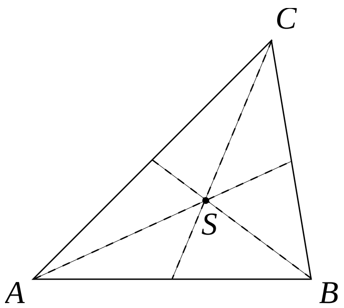
Látószögek tétele:
Adott $A \neq B$ síkbeli pontok és α $(0 < \alpha < \pi)$ szög esetén a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre $APB\sphericalangle = \alpha$: két nyílt körív egyesítése, amelyek AB-re szimmetrikusak.
Speciális eset: Thalész tétele $(\alpha = \pi/2)$.

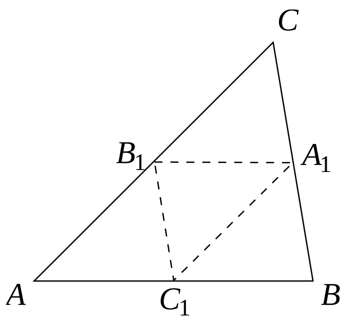
- Háromszög nevezetes körei, vonalai és pontjai:











  - beírt kör: középpontja a szögfelezők metszéspontja,
  - körülírt kör: középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja,
  - magasságvonalak, magasságpont,
  - súlyvonalak, súlypont (a súlyvonalak harmadolják egymást),
  - középvonalak ($A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = AB/2$).

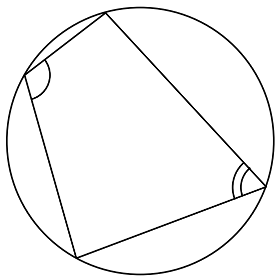
4.3 Speciális négyszögek

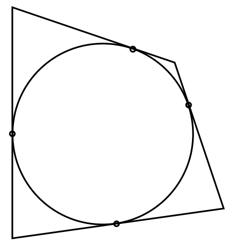
- Parallelogramma ekvivalens jellemzései:

  Egy négyszög akkor és csak akkor parallelogramma, ha
  - két-két szemközti oldal párhuzamos,
  - két-két szemközti oldal egyenlő,
  - két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
  - két-két szemközti szög egyenlő,
  - az átlók felezik egymást,
  - középpontosan szimmetrikus.

- További fontos négyszögtípusok:
  - Trapéz: két oldal párhuzamos (alapok). A középvonal egyenlő az alapok számtani közepével.
  - Szimmetrikus trapéz (húrtrapéz): az alapok felező merőlegese közös.
  - Deltoid: két-két szomszédos oldal egyenlő (szimmetrikus az egyik átlóra).
  - Rombusz: egyenlő oldalú négyszög (mindkét átlóra szimmmetrikus; olyan parallelogramma, amelynek merőlegesek az átlói).
  - Téglalap: egyenlő szögű négyszög (mindegyik szög derékszög; olyan parallelogramma, amelyben az átlók egyenlők).
  - Négyzet: negyedrendben forgásszimmmetrikus négyszög (egyenlő oldalú téglalap; derékszögű rombusz).

– Húrnégyszög, érintőnégyszög:



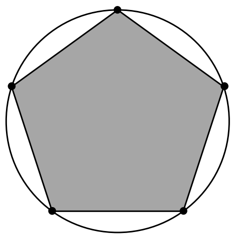


Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögei kiegészítő szögek.

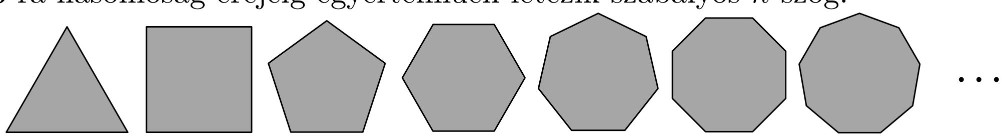
Bármely érintőnégyszögben a szemközti oldalpárok összege egyenlő.

4.4 Szabályos sokszögek

Ha adott az $n \geq 3$ természetes szám, osszuk egy kör kerületét n egyenlő részre. (A részívek mindegyikéhez tehát $2\pi/n$ középponti szög tartozik.) Ekkor az osztópontok konvex burka szabályos n-szög.



A szabályos sokszög minden oldala egyenlő, és mindegyik szöge $(n-2)\pi/n$-nel egyenlő. Rögzített n mellett bármely két szabályos n-szög hasonló, tehát minden $n \geq 3$-ra hasonlóság erejéig egyértelműen létezik szabályos n-szög:



Észrevételek:
Egy n-oldalú sokszög pontosan akkor szabályos, ha n-edrendben forgásszimmetrikus.
Egy háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha egyenlő oldalú.

5. Szerkesztések

Az euklideszi szerkesztés matematikai definíciójának hátterében a vonalzó és a körző használata áll. Matematikai szempontból természetesen nem a szerkesztés tényleges kivitelezése a fontos, hanem az adott kérdéshez a szerkesztési eljárás megtalálása és fölépítése. Az elméleti matematika számára a szerkesztések kérdéskörét az teszi érdekessé, hogy a megoldható szerkesztési feladatok mellett vannak egyszerűen megfogalmazható, de euklideszi szerkesztéssel nem megoldható szerkesztési problémák is. Az utóbbiak jelentős szerepet játszottak a modern (19. századi) absztrakt matematika eszközeinek kifejlődésében.

5.1 Definíciók: euklideszi szerkesztés, szerkeszthetőség

Mindvégig egy rögzített síkban dolgozunk; a szerkesztések ebben a síkban fekvő pontokat, egyeneseket és köröket használnak, illetve állítanak elő.

- **Adatok:** Pontoknak, egyeneseknek és köröknek egy előre rögzített, tetszőleges halmaza. Ezeket a szerkesztés során már megszerkesztettnek tekinthetjük. (Ha valamely szerkesztési feladathoz egyáltalán nem adunk meg adatokat (pl. „Szerkesszünk szabályos ötszöget”), akkor önkényesen felvehetjük a sík két pontját mint adatokat.)
- **Elemi szerkesztési lépések:**
  - Ha A és B már megszerkesztett pontok, akkor az AB egyenest megszerkesztettnek tekinthetjük.
  - Ha O, P és Q már megszerkesztett pontok, akkor az O középpontú, PQ sugarú kört megszerkesztettnek tekinthetjük.
  - Ha e és f már megszerkesztett metsző egyenesek, akkor e és f metszéspontját megszerkesztettnek tekinthetjük.
  - Ha a már megszerkesztett k körnek a már megszerkesztett e egyenes szelője, akkor k és e mindkét metszépontját megszerkesztettnek tekinthetjük.
  - Ha k és l már megszerkesztett, egymást metsző körök, akkor k és l mindkét metszépontját megszerkesztettnek tekinthetjük.
- **Euklideszi szerkesztés:** Véges sok egymás után végrehajtott elemi szerkesztési lépés sorozata. Az euklideszi szerkesztés eredménye az összes olyan pont, egyenes és kör, amely a szerkesztés valamelyik lépésében előállt.
- **Szerkeszthetőség:** Először rögzítjük az adatokat. Azt mondjuk, hogy valamely pont, egyenes vagy kör a felvett adatokból megszerkeszthető, ha létezik olyan euklideszi szerkesztés, amelynek eredménye. Ugyancsak megszerkeszthetőnek mondjuk az ezekből a pontokból, egyenesekből és körökből közvetlenül előálló további alakzatokat is. (Például egy szabályos sokszöget megszerkeszthetőnek mondunk, ha a csúcsainak a halmaza megszerkeszthető.)

5.2 Néhány alapvető szerkesztési eljárás

A szerkesztési feladatok megoldása során általában nem szükséges a szerkesztést az elemi lépésekig lebontanunk. Elegendő, hogy olyan szerkesztések egymásutánjára vezetjük vissza, amelyeket önmagukban szerkesztési feladatnak tekintve korábban már megoldottunk. Érdemes tehát néhány gyakran előforduló szerkesztési alapfeladat megoldását tisztázni. A továbbiakban ezekre már mint szerkesztési lépésekre hivatkozhatunk, nem kell őket részletezni:

- szakaszfelezés, szakaszfelező merőleges szerkesztése,
- adott ponton át adott egyenesre merőleges egyenes szerkesztése,
- adott ponton át adott egyenessel párhuzamos egyenes szerkesztése,
- szakasz vagy szög többszörözése,
- szögfelezés,

– adott szakaszhoz adott szögű látószögkörív szerkesztése,
– szakasz n egyenlő részre osztása,
– adott körhöz adott külső pontból érintő szerkesztése,
– két adott kör közös érintőinek a megszerkesztése.

5.3 Klasszikus szerkesztési problémák

Az antik időkből származó három híres szerkesztési feladat:

- „A kör négyszögesítése": bármely adott körhöz szerkesszünk vele egyenlő területű négyzetet.
- „Szögharmadolás": bármely adott szöghöz szerkesszünk harmadakkora szöget.
- „Kockakettőzés" („déloszi probléma" néven is ismert): ha tetszőlegesen adott egy kocka élhossza, szerkesszük meg annak a kockának az élhosszát, amely kétszer akkora térfogatú.

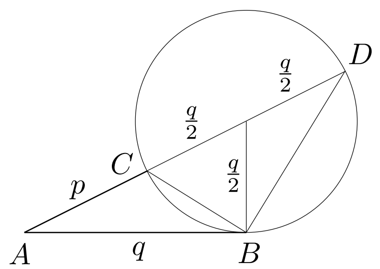
Ezekről a feladatokról a 19. században megszületett absztrakt algebrai eszközök (a testbővítések elmélete) segítségével bizonyították be, hogy euklideszi szerkesztéssel nem megoldhatók.

Szintén a 19. században Gauss számelméleti módszerekkel meghatározta, hogy mely $n \geq 3$ természetes számok esetében lehet euklideszi szerkesztéssel szabályos n-szöget szerkeszteni. Gauss tétele szerint a szabályos n-szög akkor és csak akkor szerkeszthető, ha az n szám prímtényezős alakjában minden páratlan prím $2^k + 1$ alakú (ún. Fermat-féle prím), és csak első hatványon szerepel. Tehát például $n \leq 10$, $n \neq 7, 9$ esetén a szabályos n-szög megszerkeszthető, a szabályos hétszög és a szabályos kilencszög nem.

5.4 Aranymetszés, szabályos ötszög

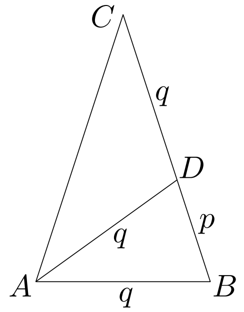
- **Definíció:** Azt mondjuk, hogy egy szakaszt egy osztópontja az aranymetszés arányában osztja, ha a rövidebbik rész úgy aránylik a hosszabbikhoz, mint a hosszabbik az egészhez: $p : q = q : (p+q)$, ahol p a rövidebb, q a hosszabb részt jelöli a $p+q$ hosszúságú szakaszon.
  Magát a $\tau = q/p = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ hányadost (ami egy 1 és 2 közötti irracionális szám) is szokás aranymetszésnek nevezni. Könnyen ellenőrizhető, hogy τ az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet pozitív gyöke.

Bármely adott q hosszúságú szakaszhoz euklideszi szerkesztéssel elő tudjuk állítani a vele aranymetszést alkotó p hosszúságú szakaszt. Az alábbi ábrából a szerkesztés kiolvasható:



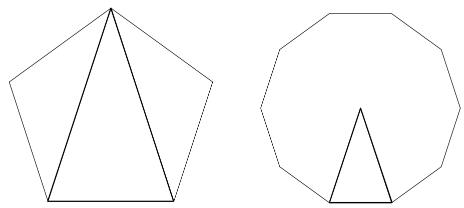
Az ábrán a kerületi szögek tétele folytán ABC és ADB hasonló háromszögek, ezért valóban $p : q = AC : AB = AB : AD = q : (p + q)$.

Tekintsünk egy olyan ABC egyenlő szárú háromszöget, amelyben $A\sphericalangle = B\sphericalangle = 72°$, $C\sphericalangle = 36°$:



Vágjuk ketté a háromszöget az AD szögfelezővel. A keletkező szögek mutatják, hogy két egyenlő szárú részháromszöget kapunk, amelyek közül a BDA háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. A megfelelő oldalak arányát fölírva a megjelölt távolságokra $p : q = q : (p + q)$ adódik, tehát az ABC háromszögben a szár és az alap aránya az aranymetszéssel egyenlő. Emiatt a $72°$, $72°$, $36°$ szögekkel bíró háromszög euklideszi szerkesztéssel előállítható.

Ilyen háromszöget találunk egy szabályos ötszögben is két átló által közrefogva, illetve egy szabályos tízszögben is a körülírt kör középpontja és a tízszög két szomszédos csúcsa által kifeszítve:

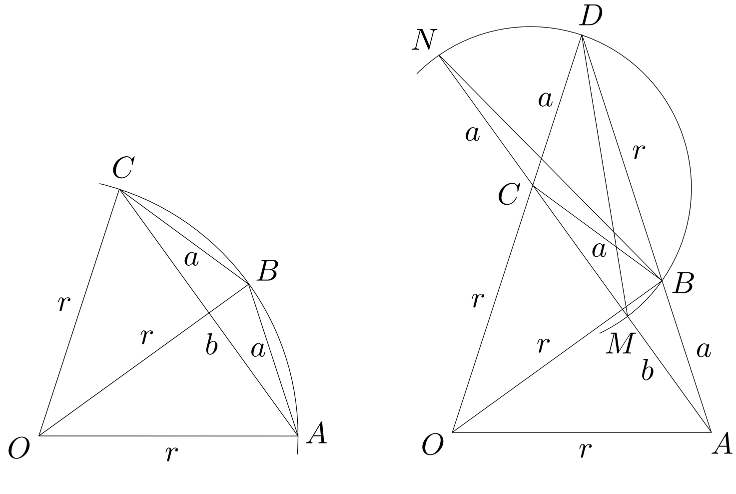


A háromszögből kiindulva a szabályos ötszög, illetve a szabályos tízszög könnyen rekonstruálható euklideszi szerkesztéssel.

A szabályos ötszög egyszerűbb, közvetlen szerkesztéséhez vezet a következő észrevétel.

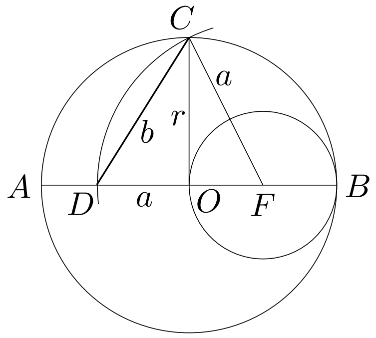
- **Tétel:** *Jelölje a, illetve b az r rugarú körbe beírt szabályos tízszög, illetve szabályos ötszög oldalhosszát. Ekkor $b^2 = a^2 + r^2$.*

  Bizonyítás:



Az O középpontú r sugarú körben legyen A, B és C a beírt szabályos tízszög három egymást követő csúcsa, ekkor $AB = BC = a$ és $AC = b$. Az OC és AB egyenesek messék D-ben egymást, ekkor az OAD háromszög szögei rendre $72°$, $72°$, $36°$ nagyságúak. Emiatt $BD = r$ és $CD = a$. Rajzoljuk meg a C középpontú a sugarú kört, és annak AC átmérőegyenesét.
Ennek az átmérőnek a végpontjai legyenek M és N, $AM = b - a$, $AN = b + a$. A kerületi szögek tétele folytán az ADM háromszög és az ANB háromszög hasonló, emiatt $AD : AM = AN : AB$, azaz $(a + r) : (b - a) = (b + a) : a$. Ebből átrendezve $a(a + r) = b^2 - a^2$ adódik. Viszont r és a az aranymetszés szerint aránylik egymáshoz, ami azt jelenti, hogy $a(a + r) = r^2$. Ezekből már közvetlenül adódik a tételbeli képlet.

A tétel felhasználásával az adott körbe beírt szabályos ötszög oldalhosszára az alábbi egyszerű szerkesztési eljárást kapjuk:



Az O középpontú r sugarú körben induljunk ki egy AB átmérőből és a rá merőleges OC sugárból. Legyen F az OB sugár felezőpontja, és messük el az AB szakaszt az F középpontú, FC sugarú körrel a D pontban. Az így kapott CD szakasz hossza a körbe írt szabályos ötszög oldalával egyenlő. Indoklás gyanánt felismerhetjük az ábrában az aranymetszés szerkesztését, amely r-ből kiindulva az előző tételben a-val jelölt szakaszt állítja elő. A tétel felhasználásával a Pitagorasz-tétel alapján valóban $CD = b$.

6. Sokszögek és poliéderek

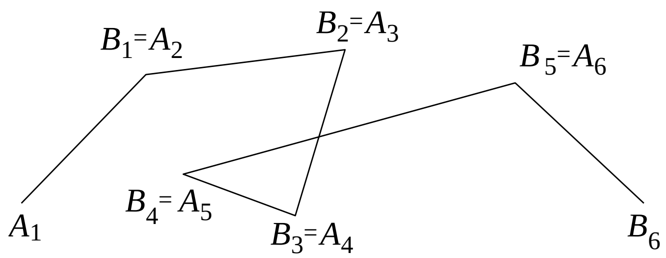
6.1 Sokszögek

Sokszög definíciója:

Töröttvonalnak nevezzük nemelfajuló szakaszok egy véges

$$T = \big([A_1, B_1], [A_2, B_2], \ldots, [A_n, B_n]\big)$$

sorozatát, ahol minden $i = 1, \ldots, n - 1$-re $B_i = A_{i+1}$:

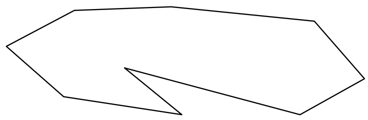


Az A_1 pontot a T töröttvonal kezdőpontjának, a B_n pontot T végpontjának nevezzük.

A T töröttvonal zárt, ha a kezdőpontja és a végpontja azonos: $A_1 = B_n$.

A töröttvonal egyszerű, ha a benne szereplő szakaszoknak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincs közös pontja.

Egy egyszerű, zárt, síkbeli töröttvonalat, amelynek a törésszögei zérustól különböznek (azaz semelyik két szomszédos szakasz nem esik egymás meghosszabbításába), sokszögvonalnak hívunk.



A sokszögvonal csúcsai a csatlakozási pontok, a szakaszok a sokszögvonal oldalai. A csúcsok száma és az oldalak száma egyenlő.

(Ugyancsak sokszögvonalnak szokás nevezni a benne szereplő szakaszok egyesítését mint síkbeli ponthalmazt.)

A sokszöglemez értelmezése céljából meg kell tudni különböztetni a sokszögvonalon belül elhelyezkedő pontokat a sokszögvonalon kívüliektől. Ezt nem könnyű szabatosan megtenni. A következő tétel (amelyet nem bizonyítunk be) adja a megoldást.

- A sokszögekre vonatkozó Jordan-féle tétel:

  Bármely T sokszögvonal a sík T-hez nem tartozó pontjait két osztályba sorolja aszerint, hogy ugyanabba az osztályba tartozó pontok összeköthetők T-től diszjunkt töröttvonallal, míg különböző osztályba tartozók nem. A két osztály közül az egyik korlátos, a másik nem.

A két osztály közül a korlátosat nevezzük a T sokszögvonal belsejének, a másikat a külsejének. Ezzel végül eljutunk a sokszög definíciójához:

- **Definíció:** Sokszögön olyan ponthalmazt értünk a síkban, amely egy sokszögvonal és a belseje egyesítéseként áll elő.

Például bármely háromszög, bármely négyszög, stb., egyúttal sokszög. Az n oldalú sokszögeket n-szögeknek is nevezzük.

Elnevezések:

– A sokszög csúcsain és oldalain a sokszögvonal csúcsait, illetve oldalait értjük.

– A sokszög átlói a csúcsokat összekötő, oldaltól különböző szakaszok.

– Oldalegyenesek, átlóegyenesek: az oldalakat, illetve átlókat tartalmazó egyenesek.

– Belső szögek: Bármely csúcsnál az oda befutó két él a teljes szöget két szögtartományra bontja, ezek közül az egyik nyílik a sokszög belseje felé. Ezt a szöget nevezzük a sokszög belső szögének a szóban forgó csúcsnál.
  Ha nem vezet félreértésre, akkor a belső szögeket egyszerűen a sokszög szögeinek is nevezhetjük.

- **Tétel** (szögösszegtétel)**:** *Bármely n oldalú sokszögben a belső szögek összege* $(n-2)\pi$.

A szögösszegtételt nem bizonyítjuk be. Meg lehet mutatni, hogy bármely n-szöget egymást nem metsző átlókkal fel lehet darabolni $n-2$ darab háromszögre, amiből a tétel rögtön következik.

6.2 Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között. Az alábbi tételt sem bizonyítjuk be.

- **Tétel:** *Bármely S sokszögre az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:*

(1) *S konvex;*
(2) *S bármelyik oldalegyenese két olyan félsíkot határol, amelyek egyike lefedi S-et;*
(3) *Bármely, az oldalegyenesektől különböző egyenesnek a sokszögvonallal legfeljebb 2 közös pontja van;*
(4) *S tartalmazza mindegyik átlóját;*
(5) *S mindegyik belső szöge π-nél kisebb.*

(Az (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) következtetéseket nem nehéz igazolni; az (5) $\Longrightarrow$ (1) jóval nehezebb.)

Az alábbi tétel azt az eljárást tisztázza, amellyel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Bár magától értetődőnek tűnik, szabatos bizonyítása nehéz. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

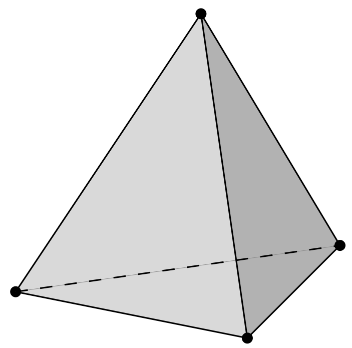
- **Tétel:** *A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.*

6.3 Konvex poliéderek

A konvex sokszög fogalmának háromdimenziós megfelelőjét vizsgáljuk. Nem definiáljuk általánosságban a poliéder fogalmát, eleve csak konvex poliéderekre szorítkozunk.

- **Definíció:** Konvex poliédernek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.

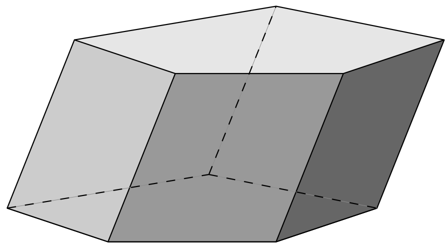
Vegyük észre, hogy egy konvex poliéder előállításához minimálisan 4 pont szükséges (kevesebb pont egy síkban feküdne).



A négy nem egysíkú pont konvex burkaként előálló ponthalmazok a tetraéderek.

Konvex poliéderek néhány gyakrabban előforduló típusát tekintjük át.

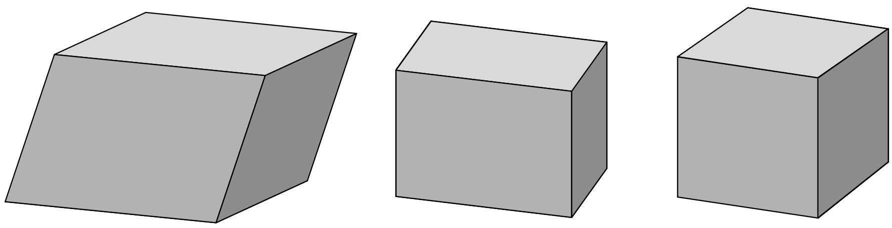
Hasábok:



Legyen S konvex sokszög, valamint S' az S egy eltolt példánya olyan eltolásnál, amelynek az iránya nem párhuzamos S síkjával. Ekkor az $S \cup S'$ ponthalmaz konvex burkát S alapú hasábnak nevezzük. (A hasáb valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S és S' csúcsaiból álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti a definíció követelményeit.)

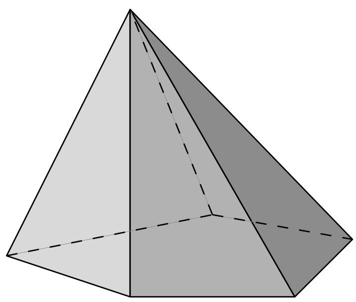
Ha az S sokszög n-oldalú, akkor az S alapú hasábot is n-oldalú hasábnak nevezzük.

Speciális négyoldalú hasábok:



parallelepipedon (= parallelogramma alapú hasáb), téglatest, kocka.

Gúlák:



Legyen S konvex sokszög, és P olyan pont, amely nem fekszik az S sokszög síkjában. Ekkor az $S \cup \{P\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú gúlának nevezzük. (A gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcsaiból és P-ből álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti a definíció követelményeit.)

Ha az S sokszög n-oldalú, akkor az S alapú gúlát is n-oldalú gúlának nevezzük. A háromoldalú (azaz háromszög alapú) gúlák pontosan a tetraéderek.

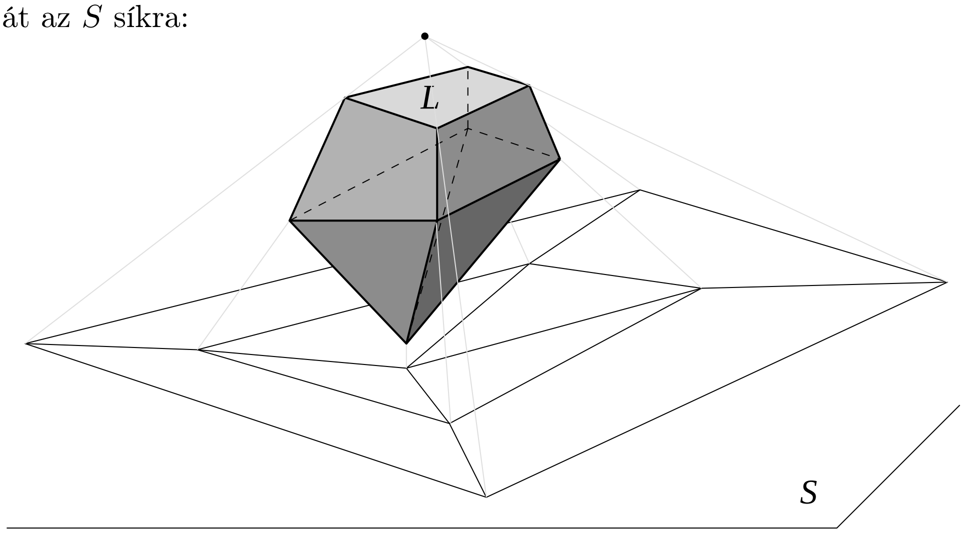
A konvex poliéderek jellegzetes tulajdonsága, hogy csúcsaik, éleik és lapjaik vannak, amelyek a poliédereket érdekes kombinatorikai tulajdonságokkal ruházzák föl. A csúcsokat, éleket és lapokat a poliéderekkel együtt rögtön szemléletesen magunk előtt látjuk, viszont szabatos, nem pusztán a szemléletünkre hivatkozó definíciójuk egyáltalán nem könnyű, elhagyjuk.

A csúcsok, élek és lapok rendszerét a poliéder kombinatorikai szerkezetének szokás nevezni. A kombinatorikai szerkezet fontos jellemzője a csúcsok, élek, illetve lapok száma, amelyet szokásosan rendre c-vel, e-vel és l-lel jelölünk. Például n-oldalú hasáb esetében $c = 2n,\ e = 3n,\ l = n + 2$, míg n-oldalú gúla esetében $c = n + 1$, $e = 2n,\ l = n + 1$.

A konvex poliéderek kombinatorikai szerkezetére vonatkozó legnevezetesebb tétel ezekre a c, e, l adatokra vonatkozik.

- **Tétel (Euler-féle poliédertétel):** *Bármely konvex poliéder kombinatorikai adataira érvényes a* $c + l = e + 2$ *egyenlőség.*

  Bizonyítás (Steiner bizonyítása): Szemeljük ki az adott P konvex poliéder egyik lapját, L-et, válasszunk egy L-lel párhuzamos (és L-et nem tartalmazó) S síkot, és a térben alkalmasan megválasztott vetítési középpontból vetítsük P összes lapját az S síkra:



  Ha a vetítési középpontot P-n kívül, de az L laphoz elég közel választjuk, akkor az S síkon keletkező vetületi ábráról az alábbiakat állapíthatjuk meg:
  – mindegyik lap vetülete konvex sokszög az S síkban,
  – az L lap vetülete tartalmazza az összes többi lap vetületét,
  – az L-től különböző lapok vetületei átfedés nélkül kitöltik L vetületét.
  Ahhoz, hogy ezek a megállapítások érvényesek legyenek, a vetítési középpont megválasztásánál elegendő arra ügyelni, hogy a középpont az L-től különböző lapok síkjának ugyanazon az oldalán legyen, mint maga a poliéder.

  Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük:

  1. Egyrészt a vetületi ábra belsejébe kerülő mindegyik csúcs körül a szögösszeg a 2π teljesszög; az ilyen csúcsok száma $c - k$, ahol k jelöli az L lap oldalszámát. A többi (az ábra szélére kerülő) k darab csúcsnál a szögek összege az L lap szögösszegének a kétszeresét adja, hiszen ezeket a szögeket egyszer L vetülete, másodszor az L vetületét kitöltő többi lapvetület fedi le. Így tehát a szóban forgó szögösszeg $(c - k) \cdot 2\pi + 2 \cdot (k - 2)\pi = 2c\pi - 4\pi$.
  2. Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk. (Ezzel az eljárással is is persze ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk; ez adja majd a tételbeli egyenlőség bizonyítását.) Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldalszáma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra

összeadjuk, akkor a $2e\pi - 2l\pi$ mennyiséget kapjuk. A lapok oldalszámainak az összege ugyanis éppen az élek számának a kétszerese, hiszen az összeszámlálásnál minden élt kétszer vettünk számításba. A levonandó pedig minden lap esetében 2π, összesen $2l\pi$.

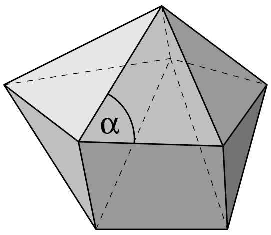
A két eredmény összevetésével a $2c\pi - 4\pi = 2e\pi - 2l\pi$ összefüggést kapjuk, ahonnan 2π-vel osztva $c - 2 = e - l$, azaz átrendezve a tétel állítása következik.

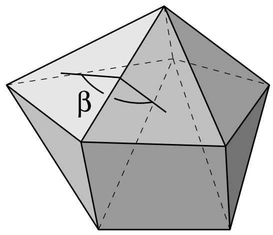
6.4 Szabályos poliéderek

- Konvex poliéderek szögei:

A poliéderek esetében kétféle szögről beszélhetünk:

Legyen P konvex poliéder.





P élszögei: azok a szögek (az ábrán α), amelyeket P egy csúcsából induló, egy lapján fekvő élek zárnak be.

P lapszögei: azok a szögek (az ábrán β), amelyeket P él mentén szomszédos lapjai zárnak be. A lapszögeket tehát az élekre merőleges síkokban mérjük.

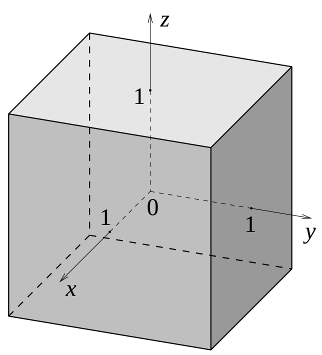
- **Definíció:** Egy konvex poliéder szabályos, ha minden éle egyenlő, minden élszöge egyenlő, és minden lapszöge egyenlő.

  (Megjegyzés: a definícióban mindhárom követelményre szükség van, ugyanis egyikük sem következik a másik kettőből; javasoljuk, hogy az olvasó keressen ezt demonstráló példákat.)

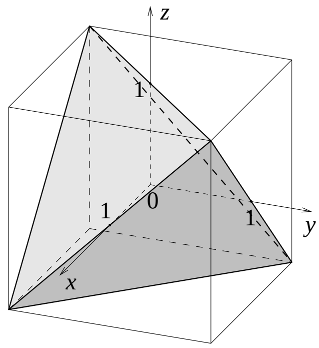
Bármely szabályos poliéder lapjai egybevágó szabályos sokszögek, és minden csúcsban ugyanannyi lap fut össze.

Példák szabályos poliéderekre:

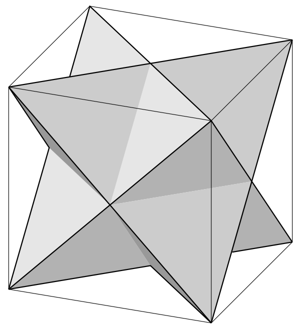
- Kocka:
  Helyezzük el a térbeli koordinátarendszerben úgy, hogy a csúcsai a $(\pm1, \pm1, \pm1)$ pontok legyenek, ekkor a kocka éle 2 egységnyi, a középpontja az origóban van:



- Szabályos tetraéder:
  Válasszuk ki a kocka csúcsai közül „minden másodikat”, pl. a $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ csúcsokat:

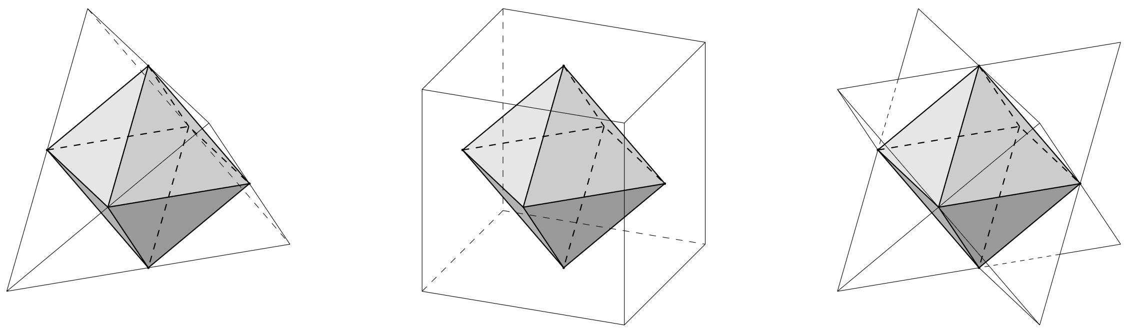


  A kockába ilyen módon két szabályos tetraéder írható be, ezek egymás középpontos tükörképei:



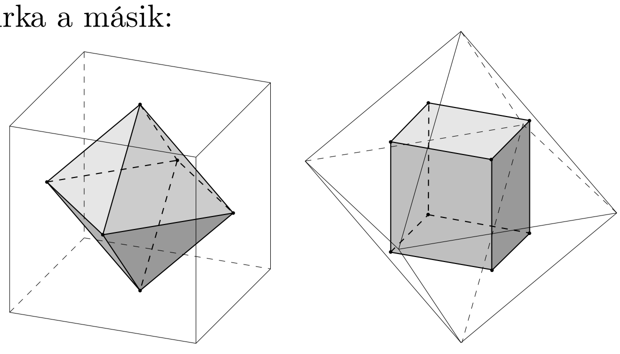
  A kockába beírt két tetraéder élfelező pontjai azonosak: a kocka lapközéppontjai.

- Szabályos oktaéder: a szabályos tetraéder élfelező pontjainak a konvex burka = a kocka lapközéppontjainak a konvex burka = a kockába írt két tetraéder közös része:

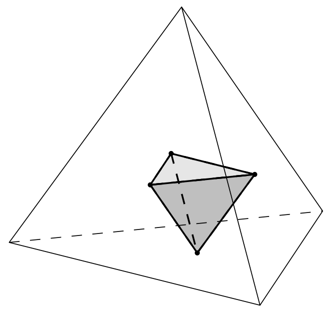


  Koordinátarendszerben a csúcsok koordinátái: $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$.

Geometriai dualitás a kocka és a szabályos oktaéder között: az egyik lapközéppontjainak a konvex burka a másik:



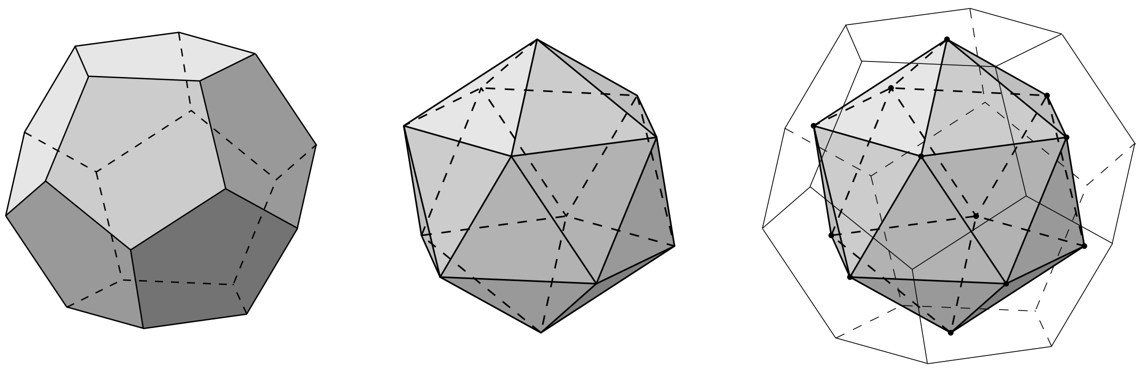
Általánosságban elmondhatjuk: Ha P szabályos poliéder és P^* jelöli a P lapközéppontjainak a konvex burkát, akkor P^* is szabályos poliéder. Szabályos tetraéder esetében ezzel az eljárással újra szabályos tetraédert kapunk:



Tehát: (tetraéder)* = tetraéder, (kocka)* = oktaéder, (oktaéder)* = kocka.

Ugyanilyen duális viszonyban áll a két következő példa is:

- Dodekaéder, ikozaéder:



Az eddig megtalált szabályos poliéderek kombinatorikai adatai táblázatosan:

Jelölések:

k : a lapok oldalszáma,
m : a csúcsok foka,
c : a csúcsok száma,
e : az élek száma,
l : a lapok száma,

ezzel

	k	m	c	e	l
tetraéder:	3	3	4	6	4
kocka:	4	3	8	12	6
oktaéder:	3	4	6	12	8
dodekaéder:	5	3	20	30	12
ikozaéder:	3	5	12	30	20

Van-e más példa? Nincsen: bebizonyítjuk a szabályos poliéderek osztályozási tételét:

- **Tétel** *Hasonlóság erejéig csak ez az ötféle szabályos poliéder létezik.*

  Bizonyítás:

  Legyen P tetszőleges szabályos poliéder. Jelölje k a P lapjainak oldalszámát, m pedig P csúcsai fokát. Ekkor $k \cdot l = 2e$, ugyanis kétszer számolunk minden élt, ha összeadjuk, hány él tartozik mindegyik laphoz; hasonló elven $m \cdot c = 2e$, ugyanis kétszer számolunk minden élt, ha összeadjuk, hány fut be mindegyik csúcsba.

  Így az Euler-féle poliédertételt fölhasználva

$$e < e + 2 = l + c = \frac{2e}{k} + \frac{2e}{m}, \qquad \text{és így} \qquad 1 < \frac{2}{k} + \frac{2}{m}.$$

Átalakítva: $km < 2m + 2k$, azaz $km - 2m - 2k + 4 < 4$, azaz $(k-2)(m-2) < 4$.

Mivel $k, m \geq 3$ egészek, az utolsó egyenlőtlenség bal oldalán két természetes szám szorzata áll. Így ez a szorzat csak $1 \cdot 1$, $2 \cdot 1$, $1 \cdot 2$, $3 \cdot 1$, vagy $1 \cdot 3$ lehet.

A megfelelő (k, m) párok tehát $(3,3)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(5,3)$ és $(3,5)$, amelyek rendre a szabályos tetraéderhez, a kockához, a szabályos oktaéderhez, a dodekaéderhez, illetve az ikozaéderhez tartoznak. A (k, m) pár a poliédert hasonlóság erejéig egyértelműen meghatározza – ez ahhoz hasonlóan gondolható meg, mint ahogyan a sokszögek esetében látjuk, hogy az oldalszám a szabályos sokszöget hasonlóság erejéig egyértelműen meghatározza.

Ezzel az osztályozási tételt beláttuk.