

## Kompozíciók a sík egybevágóságai körében

## Jelölések:

$E_{\mathbf{v}}$ : eltolás a  $\mathbf{v}$  vektorral,

$T_e$ : tükrözés (síkban) az  $e$  egyenesre,

$F_{P,\alpha}$ : forgatás (síkban) a  $P$  pont körül  $\alpha$  forgásszöggel,

$\tau_P$ : tükrözés a  $P$  középpontra (síkban  $\tau_P = F_{P,\pi}$ ).

1. Milyen  $e, f$  egyenesekre teljesül  $T_e(f) = f$ ?
2. Milyen  $e, f$  egyenesekre teljesül  $T_f \circ T_e = T_e \circ T_f$ ?
3. Legyenek  $e, f$  és  $g$  párhuzamos egyenesek a síkban. Milyen transzformáció a  $T_g \circ T_f \circ T_e$  kompozíció?
4. Tegyük föl, hogy a síkbeli  $e, f$  és  $g$  egyenesek a közös  $P$  ponton haladnak át. Mutassuk meg, hogy a  $T_g \circ T_f \circ T_e$  kompozíció tengelyes tükrözés. Jellemezzük az egyeneseket azzal az irányított szöggel, amelyet valamely rögzített,  $P$ -n átmenő egyenessel zárnak be, és fejezzük ki a kompozíció tengelyéhez tartozó szöget az  $e$ -hez,  $f$ -hez és  $g$ -hez tartozó  $\alpha, \beta$ , illetve  $\gamma$  szöggel.
5. A síkban adott  $P$  pont esetén hogyan kell az  $e$  és  $f$  egyeneseket megválasztani, hogy  $T_f \circ T_e = \tau_P$  teljesüljön?
6. Adottak az  $F_{P,\alpha}$  és  $F_{Q,\beta}$  forgatások a síkon ( $P \neq Q$ ). Igazoljuk, hogy a két forgatás szorzata  $\alpha + \beta$  szögű forgatás, ha  $\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ , és eltolás egyébként. Ha a kompozíció forgatás, találjunk eljárást a középpont megszerkesztésére. (Útmutatás: Állítsuk elő a forgatásokat két-két tükrözés szorzataként, vegyük észre, hogy a  $PQ$  egyenes kétszer is szerepeltethető.)
7. Legyen  $ABC$  negatív körüljárású háromszög a síkon, szögei legyenek rendre  $\alpha, \beta, \gamma$ . Bizonyítsuk be, hogy az  $F_{C,2\gamma} \circ F_{B,2\beta} \circ F_{A,2\alpha}$  kompozíció identikus. (Útmutatás: Használjunk tükrözéseket.)