Megjegyzés. Az 5.5.7. Tételben tisztázott megfeleltetés alapján a síkbeli koncentrikus, valamint Apollóniosz-féle körsorokat szokás együttesen elliptikus körsoroknak nevezni. Az érintkező, illetve a metsző körsorok számára pedig használatban van a parabolikus, illetve hiperbolikus körsor elnevezés.

5.5.8. Következmény. *A síkbeli Möbius-transzformációk (és így speciálisan az inverziók) a körsorokat és a sugársorokat körsorokba vagy sugársorokba képezik. Ha a párhuzamos sugársorokat a parabolikus körsorok közé, a metszőket a hiperbolikusak közé soroljuk, akkor a Möbius-transzformáció a sor elliptikus, parabolikus, illetve hiperbolikus jellegét megtartja.* □

6. Szabályos politópok

Az elemi sík- és térgeometria klasszikus alakzatai a szabályos sokszögek és a szabályos poliéderek. Ezeket általánosítjuk a magasabb dimenziójú euklideszi terek esetére, majd elvégezzük a szabályos politópok teljes osztályozását. A szabályos politópok szoros kapcsolatban állnak az euklideszi tér egybevágóságainak véges részcsoportjaival. A szabályosság kritériumát is a szimmetriák alkotta csoport tulajdonságain keresztül tudjuk majd megfogalmazni.

6.1. Csoporthatások

Matematikai tanulmányainkban gyakran előforduló jelenség, hogy bizonyos fajta transzformációk csoportot alkotnak, vagy hogy egy csoportot eleve valamiféle struktúrát megőrző leképezések segítségével definiálunk. Ebben a szakaszban összegyűjtjük az ezzel kapcsolatos alapvető fogalmakat és összefüggéseket.

6.1.1. Definíció (Csoporthatás). Legyen G csoport és X tetszőleges nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy G hat az X halmazon (vagy hogy G transzformációcsoport X-en), ha adott egy

$$G \times X \ \to \ X\,, \qquad (g,x) \ \to gx$$

leképezés, amelyre

(1) minden $x \in X$-re $1x = x$, és

(2) minden $g, h \in G$-re és minden $x \in X$-re $(gh)x = g(hx)$

teljesül.

Jelöljük S_X-szel az $X \to X$ bijektív leképezések csoportját a kompozíció műveletére nézve. (Amikor X véges halmaz, akkor S_X az S_n szimmetrikus csoporttal izomorf, ahol $n = |X|$.)

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy minden $g \in G$-re a $\varphi(g) : X \to X$, $\big(\varphi(g)\big)(x) = gx$ leképezés bijektív (mégpedig az inverze $\varphi(g^{-1})$), és az ezáltal definiált $\varphi : G \to S_X$ leképezés homomorfizmus. Az is rögtön látható, hogy φ egyértelműen meghatározza G hatását X-en, ezért egy ilyen $\varphi : G \to S_X$ homomorfizmus megadása tekinthető a csoporthatás egyenértékű definíciójának.

Ha például G eleve S_X részcsoportja, akkor a G-t identikusan önmagára képező homomorfizmus a G csoport hatását definiálja X-en; ezt G természetes hatásának szokás nevezni. Az alább következő példák többsége is természetes hatás.

6.1.2. Példák

- Ha X affin tér, akkor az $\mathrm{Aff}\,(X)$ csoport hat X-en.
- Ha V vektortér, akkor a $GL(V)$ csoport hat V-n.
- Ha X metrikus tér, akkor az $I(X)$ izometriacsoport hat X-en.
- Ha V euklideszi vektortér, akkor az $O(V)$ ortogonális csoport hat V-n.
- Ha E euklideszi tér, akkor a $\mathrm{Sim}\,(E)$ csoport hat E-n.
- Legyen $\mathcal{S}$ az affin alterek halmaza az X affin térben. Ekkor az $\mathrm{Aff}\,(X)$ csoport hat az $\mathcal{S}$ halmazon.
- Legyen $\mathcal{G}$ a gömbök halmaza az E euklideszi térben, ekkor a $\mathrm{Sim}\,(E)$ csoport hat a $\mathcal{G}$ halmazon.
- Az $\mathcal{M}(E)$ Möbius-csoport hat az E^+ inverzív téren. Az előző példához hasonlóan $\mathcal{M}(E)$ az E-beli gömbök és affin alterek alkotta halmazon is hat.
- Tetszőleges G csoport hat a saját alaphalmazán baleltolásokkal ($(g,h) \mapsto gh$), jobbeltolásokkal ($(g,h) \mapsto hg^{-1}$), illetve konjugálásokkal ($(g,h) \mapsto ghg^{-1}$). Az utóbbit (amelynél az első kettővel ellentétben a G elemei által indukált transzformációk automorfizmusok a G csoportban) szokás G adjungált hatásának nevezni.
- Ha $G = N \rtimes H$ szemidirekt szorzat, akkor H hat az N csoporton a (G-beli) konjugálásokkal. Itt is H elemei automorfizmusokként hatnak az N csoporton. Nevezetes tény, hogy a G csoport rekonstruálható ennek a hatásnak az ismeretében. (Akkor kapunk direkt szorzatot, ha a hatás triviális, azaz minden $h \in H$-ra identikus.)

Megjegyzés. Leggyakrabban az X halmazon valamilyen struktúra is adott (például topologikus, differenciálható, metrikus, lineáris, vagy egyéb algebrai struktúra, esetleg ezekből egyszerre több is), és a G csoport ezt a struktúrát megőrző leképezésekkel hat. Ennek megfelelően beszélhetünk folytonos, differenciálható, izometrikus, lineáris, stb. csoporthatásokról. A fenti példák legtöbbje is ilyen jellegű.

6.1.3. Definíció (Invariáns halmaz, hatás leszűkítése). Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. Egy $Y \subseteq X$ részhalmazt invariánsnak (vagy G-invariánsnak) nevezünk, ha minden $g \in G$-re és $x \in Y$-ra $gx \in Y$. (Ilyenkor szükségképpen minden $g \in G$-re nemcsak $gY \subseteq Y$, hanem $gY = Y$ is teljesül, úgyhogy Y akkor és csak akkor invariáns, ha $GY = Y$.)

Ha $Y \subseteq X$ invariáns, akkor tekinthetjük a G csoport hatását csupán az Y halmazon. Ilyenkor beszélünk a G-hatásnak az Y-ra történő leszűkítéséről.

6.1.4. Példák

- A 6.1.2-beli hatodik példában az X-beli hipersíkok $\mathrm{Aff}\,(X)$-invariáns halmazt alkotnak $\mathcal{S}$-ben.
- Egy G csoport valamely részcsoportja akkor és csak akkor normálosztó, ha az adjungált hatásra nézve G-invariáns.

6.1.5. Definíció (Orbit). Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. A minimális nemüres invariáns halmazokat a hatás orbitjainak (vagy G-orbitoknak) nevezzük. Vezessük be a $\sim$ relációt az X halmazon a következőképpen: $x, y \in X$ esetén legyen $x \sim y$, ha létezik olyan $g \in G$, melyre $gx = y$. Rögtön látható, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció, amely szerint az ekvivalenciaosztályok éppen a G-orbitok. Ha $x \in X$ tetszőleges elem, akkor az x-et tartalmazó orbitra (amelyet x orbitjának is nevezünk) bevezetjük a Gx jelölést; nyilván $Gx = \{gx : g \in G\}$.

6.1.6. Példák

- A 6.1.2-beli első, ötödik, hetedik és nyolcadik példában szereplő csoporthatásnak egyetlen orbitja van. Ha egy csoport önmagán bal- vagy jobbeltolásokal hat, akkor is egyetlen orbit keletkezik.
- A második példában (hacsak a V vektortér nem triviális) pontosan két orbit van: az egyik csak a $\mathbf{0}$ elemet tartalmazza, a másik az összes nemzérus vektorból áll.
- A negyedik példa orbitjai az origó körüli hipergömbök és a $\{\mathbf{0}\}$ halmaz.
- A hatodik példában az orbitok úgy állnak elő, hogy valamely $0 \leq k \leq \dim X$-re az összes k-dimenziós affin alteret tekintjük.
- A G csoport adjungált hatásánál a G-orbitok éppen a G-beli konjugáltosztályok.
- Ha az $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$ komplex egységkör szorzással hat a komplex térbeli $\mathbf{S}^{2d-1} \subset \mathbf{C}^d$ egységgömbön, akkor a hatás orbitjai Clifford-párhuzamos főkörök. Speciálisan, ha $d = 2$, akkor az orbitok Hopf-féle körsereget alkotnak.

6.1.7. Definíció (Tranzitív hatás). Azt mondjuk, hogy a G csoport tranzitívan hat az X halmazon, ha a G-hatásnak egyetlen orbitja van X-ben, azaz bármely $x, y \in X$ elemekhez található olyan $g \in G$ csoportelem, hogy $gx = y$.

6.1.8. Példák

- A 6.1.6-beli első pontban felsorolt csoporthatások tranzitívak.
- Bármely csoporthatásnak egy orbitra történő leszűkítése tranzitív.

6.1.9. Definíció (Stabilizátor). Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. Valamely $x \in X$ elem stabilizátorán a $G_x = \{g \in G : gx = x\} \leq G$ részcsoportot értjük.

6.1.10. Példák

- Ha E euklideszi tér és $P \in E$, akkor $I(E)_P = O(E_P)$.
- Bármely E euklideszi térre $\mathcal{M}(E)_\infty = \mathrm{Sim}\,(E)$.
- Bármely G csoport adjungált hatásánál a stabilizátorok az elemek centralizátorai.

A következő állítás az orbitok és stabilizátorok között fennálló alapvető összefüggést rögzíti. Ezen alapulnak a véges csoportelmélet egyes leszámlálási technikái, valamint ezt használja majd a 6.2.10. Tétel bizonyítása is.

6.1.11. Állítás. *Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon és legyen $x \in X$ tetszőleges. Ekkor:*

(1) *Bármely $g \in G$-re $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, ezért ugyanahhoz az orbithoz tartozó elemek stabilizátorai konjugáltak.*

(2) *Jelölje G/G_x a G_x részcsoporthoz tartozó bal oldali mellékosztályok halmazát. Ekkor a $gG_x \mapsto gx$ hozzárendelés bijekciót létesít a G/G_x halmaz és a Gx orbit között.*

Bizonyítás: (1): Bármely $h \in G_x$-re $(ghg^{-1})(gx) = gx$ mutatja, hogy $gG_xg^{-1} \subseteq G_{gx}$. A fordított tartalmazás az ugyanilyen elven adódó $g^{-1}G_{gx}g \subseteq G_x$ formulával egyenértékű.

(2): Vegyük észre, hogy $g, h \in G$-re $gG_x = hG_x$ pontosan akkor áll fenn, amikor $h^{-1}g \in G_x$, azaz amikor $gx = hx$. Ez mutatja egyrészt, hogy a $gG_x \mapsto gx$ leképezés jól definiált, másrészt, hogy injektív. A szürjektivitás nyilvánvaló. □

6.1.12. Következmény. *Bármely X-beli elem orbitjának a számossága a stabilizátor indexével egyenlő.* □

6.1.13. Definíció (Szabad hatás). Azt mondjuk, hogy a G csoport szabadon hat az X halmazon, ha bármely X-beli elem stabilizátora triviális. Szokás ezt úgy is mondani, hogy G fixpontmentesen hat X-en.

6.1.14. Definíció (Egyszeresen tranzitív hatás). Kiemelt fontossággal bírnak azok a csoporthatások, amelyek egyszerre szabadok és tranzitívak. Ezeket egyszeresen tranzitív hatásoknak is szokás nevezni. A G csoport tehát pontosan akkor hat egyszeresen tranzitívan az X halmazon, ha bármely $x, y \in X$-re egyértelműen létezik olyan $g \in G$ csoportelem, hogy $gx = y$.

Ilyenkor bármely $x_0 \in X$ elem rögzítésével a $g \mapsto gx_0$ leképezés bijektív G és X között, és X-et G-vel izomorf csoporttá teszi, amelynek x_0 az egységeleme. (Ha X-et ilyen módon azonosítjuk G-vel, akkor a hatás G baleltolásaival történik.) Az egyszeresen tranzitív csoporthatással ellátott halmazra tehát úgy is gondolhatunk, mint olyan csoportra, amelyben „elfelejtettük", hol van az egységelem.

6.1.15. Példák

- Ha X affin tér, akkor a hozzá tartozó $V = \overrightarrow{X}$ vektortér additív csoportja az eltolások segítségével egyszeresen tranzitívan hat X-en. Könnyű meggondolni, hogy ez a tulajdonság az affin tér fogalmának egyenértékű definíciójaként is szolgálhat: ha valamely vektortér additív csoportja egyszeresen tranzitívan hat egy halmazon, akkor ezen a halmazon egyértelműen létezik olyan affin struktúra, amelynek az eltolásai éppen az adott hatást alkotják.

- Ha X affin tér, akkor az $\mathrm{Aff}\,(X)$ affin csoport egyszeresen tranzitívan hat az X-beli rendezett affin bázisok halmazán.

- Tetszőleges V vektortér esetén a $GL(V)$ általános lineáris csoport egyszeresen tranzitívan hat a V-beli rendezett bázisok halmazán.

- Ha V euklideszi vektortér, akkor az $O(V)$ ortogonális csoport egyszeresen tranzitívan hat a V-beli rendezett ortonormált bázisok halmazán.

- Legyen E euklideszi tér. Ha $f : E \to E$ egybevágóság és $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ ortonormált koordinátarendszer, akkor jelölje $f\mathbf{x}$ az $\mathbf{x} \circ f^{-1}$ kompozíciót (amely szintén ortonormált koordinátarendszer). Az $(f, \mathbf{x}) \mapsto f\mathbf{x}$ hozzárendelés által az $I(E)$ izometriacsoport egyszeresen tranzitív hatását definiáltuk az E-beli ortonormált koordinátarendszerek halmazán.

- A d-dimenziós E euklideszi térben zászlónak nevezzük az olyan $\mathcal{Z} = (F_1, F_2, \ldots, F_d)$ sorozatokat, ahol minden k-ra F_k zárt féltér egy k-dimenziós E-beli affin altérben, és $F_k \subset \partial F_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, d-1)$. Az $I(E)$ izometriacsoport egyszeresen tranzitívan hat az E-beli zászlók halmazán. Ez az előző példára hivatkozva legegyszerűbben abból látszik, hogy bijektív kapcsolat létesíthető az ortonormált koordinátarendszerek és a zászlók között: a 4.2.3-beli jelöléseket használva az $\mathbf{x} : E \to \mathbf{R}^d$ ortonormált koordinátarendszerhez illesztett zászlónak mondjuk $\mathcal{Z}$-t, ha minden k-ra az F_k félteret az $\langle A_0, A_1, \ldots A_{k-1} \rangle$ affin altér határolja és $A_k \in F_k$.

- Tetszőleges csoportnak a saját alaphalmazán akár bal-, akár jobbeltolásokkal definiált hatása egyszeresen tranzitív.

Megjegyzés. A 6.1.15-beli utolsó példa az egyszeresen tranzitív csoporthatások „prototípusa" abban az értelemben, hogy tulajdonképpen bármely egyszeresen tranzitív hatás ilyen alakú. Kézenfekvő ugyanis definiálni a csoporthatással ellátott halmazok körében az izomorfizmus fogalmát, és a 6.1.14. Definíciót követő észrevétel éppen azt mutatja, hogy egy

egyszeresen tranzitív csoporthatás izomorf a csoportnak önmagán baleltolásokkal definiált hatásával.

6.2. Véges izometriacsoportok

Egybevágóságok véges csoportjait vizsgáljuk euklideszi terekben. A 2- és 3-dimenziós esetben ezek osztályozását is elvégezzük és fényt derítünk kapcsolatukra a klasszikus szabályos poliéderekkel.

6.2.1. Állítás. *Ha $G \leq I(E)$ véges részcsoport, akkor G-nek létezik E-ben fixpontja, azaz olyan $P \in E$ pont, hogy minden $g \in G$-re $gP = P$.*

Bizonyítás: A fixpont előállítására szolgáló alábbi „kiátlagolási" eljárás a matematika más területein is gyakran alkalmazott módszer valamely véges csoporthatásra nézve invariáns objektum származtatására.
Legyen $X \in E$ tetszőleges pont és tekintsük X orbitjának a súlypontját, azaz a

$$P = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|}\, gX$$

affin kombinációt. Belátjuk, hogy P fixpontja minden $h \in G$ transzformációnak. A h izometria affinitás, ezért az affin kombinációk képzésével felcsrélhető, így

$$hP = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|}\, h(gX) = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|}\, (hg)X = \sum_{k \in G} \frac{1}{|G|}\, kX = P\,,$$

ahol a $k = hg$ elem ugyanúgy végigfut G elemein, ahogy g. □

A 6.2.1-ben talált P fixpontot origónak választva $G \leq O(E_P)$, azaz G egy ortogonális csoport része. Másként fogalmazva:

6.2.2. Következmény. *Az $I(\mathbf{R}^d)$ izometriacsoport bármely véges részcsoportja konjugált $O(d)$ egy részcsoportjával.*

Bizonyítás: Valóban, ha a $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d$ vektor a $G \leq I(\mathbf{R}^d)$ véges csoport fixpontja, akkor egy az origót $\mathbf{p}$-be vivő izometriát, például a $t_{\mathbf{p}}$ eltolást felhasználva a $t_{\mathbf{p}}^{-1} G t_{\mathbf{p}}$ részcsoportnak az origó fixpontja, ezért $t_{\mathbf{p}}^{-1} G t_{\mathbf{p}} \leq O(d)$. □

Az euklideszi tér véges izometriacsoportjainak vizsgálatakor elegendő tehát az ortogonális csoport véges részcsoportjaira szorítkozni. Megvizsgáljuk és osztályozzuk $O(2)$ és $O(3)$ véges részcsoportjait.

6.2.3. Példák

- Az $\mathbf{R}^2$ síkban bármely $n \geq 1$-re az origó körüli $2k\pi/n$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ szögű forgatások n-edrendű ciklikus csoportot alkotnak, így $\mathbf{Z}_n \leq SO(2)$.

- Ha $n \geq 3$, akkor a síknak egy origó középpontú szabályos n-szöget önmagára képező egybevágóságai $O(2)$-höz tartoznak és a $2n$ rendű D_n ($\cong \mathbf{Z}_n \rtimes \mathbf{Z}_2$) diédercsoportot alkotják. Megállapodás szerint a diédercsoportok közé soroljuk a két merőleges tengelyű tükrözés által generált $D_2 \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ és az egyetlen tükrözés által generált $D_1 \cong \mathbf{Z}_2$ csoportot is. Így minden $n \geq 1$-re $D_n \leq O(2)$.

6.2.4. Állítás. *$O(2)$ bármely véges részcsoportja ciklikus vagy diédercsoport.*

Bizonyítás: Legyen $G \leq O(2)$ véges. Tegyük föl először, hogy $G \leq SO(2)$. Ekkor G csupa origó körüli forgatásból áll, válasszuk ki ezek közül a lehető legkisebb pozitív α szögű $r = R_\alpha$ forgatást. Állítjuk, hogy r generálja G-t. Ha nem így volna, akkor létezne olyan $g \in G$ forgatás, amelynek a szöge valamilyen k pozitív egészre szigorúan $k\alpha$ és $(k+1)\alpha$ közé esne, viszont ekkor a $gr^{-k} \in G$ forgatás szöge α-nál kisebb pozitív érték volna, ami ellentmond r választásának.

Ha $G \not\leq SO(2)$, akkor a $G^+ = G \cap SO(2)$ részcsoport az eddigiek alapján ciklikus, továbbá $|G : G^+| = 2$, hiszen $SO(2)$ indexe 2 az $O(2)$ csoportban. Legyen $n = |G^+|$ és $r = R_{2\pi/n}$ generátorelem G^+-ban. Válasszunk egy $t \in G - G^+$ elemet, ekkor t tükrözés valamely origón átmenő L egyenesre. Ekkor $k = 1, \ldots, n-1$-re az $r^k t \in G$ elem tükrözés L-nek a $k\pi/n$ szögű elforgatottjára, ezért t-vel együtt már n darab különböző tükrözést találtunk G-ben. Ezek tehát kimerítik az egész $G - G^+$ mellékosztályt. Az $n \geq 3$ esetben a G csoport tehát pontosan valamely szabályos n-szög szimmetriáiból áll. (Egy ilyen n-szöget megkaphatunk például úgy, hogy választunk egy origótól különböző tetszőleges pontot valamelyik tükörtengelyen, és tekintjük e pont G-orbitjának a konvex burkát.) Az $n = 1$ és $n = 2$ esetekben pedig nyilvánvalóan egyetlen, illetve két merőleges tengely szerepel. □

Megjegyzések. (1) A 6.2.4. Állítást a szakirodalom néhol Leonardo da Vinci tételének nevezi. Fennmaradt jegyzeteinek tanúsága szerint Leonardo valóban megállapította, hogy a síkbeli alakzatok és mintázatok az egy pont körüli szimmetriatulajdonságaik alapján két végtelen sorozatot alkotó típusokba sorolhatók. Ezek a típusok a mai matematika nyelvén éppen a 6.2.4-beli csoportoknak felelnek meg.

(2) Észrevehetjük, hogy a 6.2.4. Állítás nem pusztán absztrakt izomorfia, hanem konjugáltság erejéig osztályozza $O(2)$ véges részcsoportjait. Különbséget tettünk a kételemű csoportnak forgatáscsoportként, illetve diédercsoportként való szerepeltetése között; ezek bár izomorf részcsoportok, nem konjugáltak. A diédercsoportokat egyébként nem is mint konkrét $O(2)$-beli részcsoportokat adtuk meg: a 6.2.3-beli származtatás csak konjugáltság erejéig definiálja őket.

6.2.5. Példák

- Az $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$ tartalmazás által indukált $O(2) \leq O(3)$ beágyazás folytán $O(2)$ véges részcsoportjai automatikusan megjelennek $O(3)$ részcsoportjaiként is. Az így nyert ciklikus részcsoportok közös tengely körüli forgatásokból állnak (ez $SO(3)$ részcsoportja), a diédercsoportok pedig egy közös tengely körüli forgatásokból és erre a tengelyre illeszkedő síkokra vonatkozó tükrözésekből állnak.

- Az $O(2)$ csoport $SO(3)$-ba is beágyazható, mégpedig az

$$A \mapsto \begin{pmatrix} & & 0 \\ & A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} \qquad \big(A \in O(2)\big)$$

formulával. Az $SO(2)$-beli forgatások képei a harmadik koordinátatengely körüli forgatások, az $O(2) - SO(2)$-beli tükrözések képei félfordulatok az első két koordinátatengely által kifeszített síkban fekvő tengelyek körül. Ezzel minden n-re $\mathbf{Z}_n, D_n \leq SO(3)$. A $\mathbf{Z}_2$ és a D_1 csoport most – a síkbeli esettől eltérően – nemcsak izomorf, hanem konjugált is $SO(3)$-ban, ezért megállapodunk abban, hogy nem szerepeltetjük a D_n sorozatban.

6.2.6. Definíció (Szimmetriacsoport, mozgáscsoport). Legyen $X \subseteq E$ tetszőleges halmaz az E euklideszi térben. Az X halmaz szimmetriáinak mondjuk azokat az izometriákat E-ben, amelyekre nézve X invariáns. A szimmetriák által alkotott

$$\mathrm{Sym}\,(X) = \{f \in I(E) : f(X) = X\} \leq I(E)$$

részcsoportot az X halmaz E-beli szimmetriacsoportjának nevezzük. Az X halmaz mozgáscsoportja a

$$\mathrm{Sym}^+(X) = \mathrm{Sym}\,(X) \cap I^+(E)$$

részcsoport, amely X irányítástartó szimmetriáiból, más szóval mozgásaiból áll. Bármely $X \subseteq E$-re a mozgáscsoport indexe legfeljebb 2 a teljes szimmetriacsoportban.

Megjegyzés. Bármely $X \subseteq E$ halmaz E-beli szimmetriáinak az X-re történő megszorítása az X metrikus tér izometriája. Ezáltal egy $\mathrm{Sym}\,(X) \to I(X)$ homomorfizmust definiáltunk. Megmutatható, hogy ez a homomorfizmus szürjektív, azaz X izometriái mindig kiterjeszthetők a befoglaló tér izometriáivá. Miután egy izometriát egy affin bázis és annak képe egyértelműen meghatároz, a $\mathrm{Sym}\,(X) \to I(X)$ homomorfizmus injektív is abban az esetben, ha X affin burka az egész E.

6.2.7. Állítás. *Ha $P \subseteq E$ politóp,* $\dim P = d$*, akkor P szimmetriacsoportja véges.*

Bizonyítás: Jelölje X a P politóp csúcsai halmazát, ekkor $\langle X \rangle = E$ és így az előző megjegyzés utolsó mondatához hasonlóan érvelve a $\mathrm{Sym}\,(P) \to S_X$ megszorító leképezés injektív homomorfizmus a véges S_X csoportba. □

Véges izometriacsoportokra további példáinkat a háromdimenziós szabályos politópok (azaz a klasszikus értelemben vett szabályos poliéderek) szimmetriacsoportjai szolgáltatják. Most ezek algebrai szerkezetét vizsgáljuk meg. Hasonlóság erejéig öt szabályos poliéder létezik: a szabályos tetraéder, a kocka, az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder. Ezek geometriai és kombinatorikai szerkezetét ismertnek tételezzük fel. Felidézzük a kocka és az oktaéder, illetve a dodekaéder és az ikozaéder közötti dualitási viszonyt: mindkét duális párban az egyik fajta poliéder előáll, mint a másik lapközéppontjainak a konvex burka. Ez maga után vonja kombinatorikai szerkezetük duális voltát is.

6.2.8. Példák

- Legyen T szabályos tetraéder. A szimmetriák a négy csúcs permutációit indukálják, ezzel egy $\mathrm{Sym}\,(T) \to S_4$ injektív homomorfizmust kapunk. Miután a tetraéder éleihez tartozó felező merőleges síkokra vonatkozó tükrözések az S_4-beli transzpozíciókat indukálják, amelyek generátorrendszert alkotnak S_4-ben, ez a homomorfizmus szürjektív is. Tehát $\mathrm{Sym}\,(T)$ az S_4 szimmetrikus csoporttal azonosítható. A $\mathrm{Sym}^+(T)$ mozgáscsoport ezen belül csak az A_4 alternáló csoport lehet, hiszen S_4-nek nincs más 2 indexű részcsoportja.

- Legyen K kocka. A középpontos szimmetria a $\mathrm{Sym}\,(K)$ csoport centrumához tartozik, másodrendű, és nincs benne a $\mathrm{Sym}^+\,(K)$ mozgáscsoportban. Ezért az általa generált $\mathbf{Z}_2$-vel izomorf részcsoport a mozgáscsoport direkt kiegészítője, azaz $\mathrm{Sym}\,(K) \cong \mathrm{Sym}^+(K) \times \mathbf{Z}_2$ érvényes.

  Vegyük számba $\mathrm{Sym}^+(K)$ identitástól különböző elemeit. Ezek mindannyian forgatások, mégpedig olyan tengely körül, amely két átellenes csúcsot köt össze (0. típus), két szemközti él felezőpontját köti össze (1. típus), vagy pedig két szemközti lap középpontját köti össze (2. típus). A 0. típusba 4 tengely körül 2-2 forgatás, az 1. típusba 6 tengely körül 1-1 forgatás, a 2. típusba 3 tengely körül 3-3 forgatás tartozik, ezért ezeknek a forgatásoknak száma összesen $4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 23$. Az identikus transzformációt is hozzávéve kapjuk, hogy a $\mathrm{Sym}^+(K)$ csoport rendje 24.

  Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Sym}^+(K)$ az S_4 szimmetrikus csoporttal izomorf. Tekintsük a kocka négy testátlóját, ezeket a kocka szimmetriái egymás közt permutálják, ezáltal nyerünk egy $\mathrm{Sym}^+(K) \to S_4$ homomorfizmust. Bármely transzpozíció előáll alkalmas 1. típusú félfordulat képeként, ezért ez a homomorfizmus szürjektív. Miután a két csoport rendje egyenlő, szükségképpen injektív is. Tehát $\mathrm{Sym}^+(K) \cong S_4$.

  A kocka és az oktaéder között fennálló dualitás következtében az oktaéder szimmetriacsoportja és mozgáscsoportja ugyanaz, mint a kockáé.

- Legyen D dodekaéder. Miután D is középpontosan szimmetrikus, a kocka esetéhez hasonlóan $\mathrm{Sym}\,(D) \cong \mathrm{Sym}^+(D) \times \mathbf{Z}_2$.

  Számba vesszük D nem-identikus forgatásait: a kocka esetéhez hasonló módszerrel típusokba sorolva $10 \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 6 \cdot 4 = 59$-et találunk, az identitást hozzávéve $|\mathrm{Sym}^+(D)| = 60$.

  Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Sym}^+(D)$ az A_5 alternáló csoporttal izomorf. Tekintsük a dodekaéderbe beírható öt kockát, ezeket a dodekaéder szimmetriái egymás közt permutálják, ezáltal a $\mathrm{Sym}^+(D) \to S_5$ homomorfizmust nyerjük. Meggondolható, hogy bármelyik 0. típusú forgatás képe hármas ciklus, bármelyik 1. típusúé két diszjunkt transzpozíció szorzata, végül a 2. típusúak képei ötös ciklusok. Tehát ennek a homomorfizmusnak a képe csak páros permutációkból áll. Viszont az összes páros permutáció elő is áll képként, mert például a hármas ciklusok generátorrendszert alkotnak A_5-ben, és a 0. típusú forgatások segítségével az összes hármas ciklus előállítható. Végül a két csoport rendjének egyenlősége miatt $\mathrm{Sym}^+(D) \to A_5$ izomorfizmus.

 © Moussong Gábor, ELTE

A dodekaéder és az ikozaéder duális viszonya miatt az ikozaéder mozgáscsoportja is A_5, és szimmetriacsoportja $A_5 \times \mathbf{Z}_2$.

6.2.9. Definíció (Poliédercsoportok). A 6.2.8. Példában vizsgált csoportok jelölése és hagyományos elnevezése: $\mathrm{Sym}^+(T)$ tetraédercsoport (izomorf A_4-gyel), $\mathrm{Sym}^+(K)$ oktaédercsoport (izomorf S_4-gyel), $\mathrm{Sym}^+(D)$ ikozaédercsoport (izomorf A_5-tel); összefoglaló nevük: poliédercsoportok. Ezek mindannyian fellépnek $SO(3)$ részcsoportjaiként, és konjugáltság erejéig egyértelműen vannak értelmezve.

Az alábbi tétel – a véges forgatáscsoportok osztályozási tétele – azt mondja ki, hogy a 6.2.5-ben és 6.2.8-ban leírt példákkal $SO(3)$ összes véges részcsoportját megtaláltuk.

6.2.10. Tétel. *$SO(3)$ bármely véges részcsoportja ciklikus, diéder- vagy poliédercsoport, és így izomorf a $\mathbf{Z}_n$ $(n \geq 1)$, D_n $(n \geq 2)$, A_4, S_4 és A_5 csoportok közül pontosan az egyikkel.*

Bizonyítás: Legyen $G \leq SO(3)$ véges, $n = |G| \geq 2$. Az $\mathbf{S}^2$ egységgömb $SO(3)$-invariáns részhalmaz $\mathbf{R}^3$-ban, ezért tekinthetjük G hatását $\mathbf{S}^2$-n. Jelöljük X-szel $\mathbf{S}^2$ azon elemeinek a halmazát, amelyek stabilizátora nem triviális. A G csoport bármely nem-identikus eleme két átellenes pontot tart fixen $\mathbf{S}^2$-ben, mégpedig a forgástengely döféspontjait. Ezt a két pontot nevezzük a szóban forgó csoportelem pólusainak. Világos, hogy X azonos az összes lehetséges pólus alkotta halmazzal, és így véges.

A 6.1.11.(1) Állítás alapján az X halmaz G-invariáns, így tekinthetjük a G csoport hatását az X véges halmazon. Minden $p \in X$-re jelöljük m_p-vel a G_p stabilizátor rendjét, ekkor $m_p \geq 2$ egész szám. Számláljuk össze a pólusokat (multiplicitással) kétféleképpen. Először is G minden nem-identikus eleme 2 pólust származtat, így összesen $2(n-1)$ pólust kapunk. Ekkor viszont mindegyik pólust annyiszor számoltunk, ahány nem-identikus csoportelemnek ugyanaz a pólusa, vagyis a $p \in X$ pólust $(m_p - 1)$-szer. Ezért

$$2(n-1) = \sum_{p \in X} (m_p - 1)\,.$$

(Egészen pontosan ez a mennyiség azoknak a $(g,p) \in G \times X$ pároknak a száma, amelyekre $g \neq 1$ és $gp = p$.)

A 6.1.11.(1) Állítás miatt ugyanahhoz az orbithoz tartozó p pólusokra az m_p rend ugyanakkora. Ezért a jobb oldali összeget érdemes az orbitok szerint csoportosítani:

$$2(n-1) = \sum_{\text{orbitok}} \frac{n}{m_p}(m_p - 1)\,,$$

ahol p az orbit egy (tetszőleges) reprezentánsa, az n/m_p szám pedig 6.1.11.(2) alapján az orbit elemszáma. Az n számmal végigosztva az alábbi alapegyenletet kapjuk:

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{\text{orbitok}} \left(1 - \frac{1}{m_p}\right)\,.$$

Az egyenlet bal oldala az $[1,2)$ intervallumba, a jobb oldali összeg minden tagja pedig az $[1/2,1)$ intervallumba esik. Ezért a tagok száma, azaz a G-hatás orbitjainak a száma csak 2 vagy 3 lehet.

1. eset: 2 G-orbit van.
Jelöljük m_1-gyel és m_2-vel a megfelelő rendeket, ekkor az alapegyenletből átrendezéssel

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{2}{n}$$

adódik. Ez $m_1, m_2 \leq n$ miatt csak $m_1 = m_2 = n$ mellett teljesülhet. Ekkor az egész G csoport fixen hagy egy átellenes póluspárt, azaz $G \cong \mathbf{Z}_n$ ciklikus.

A továbbiakban tegyük föl, hogy 3 G-orbit van. Legyenek a hozzájuk tartozó rendek növekvő sorrendben $m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Az alapegyenletből átrendezéssel az

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=1+\frac{2}{n}$$

egyenletet kapjuk. Ebből $m_1 = 2$ következik, ugyanis $m_1 \geq 3$ esetén a bal oldal legfeljebb 1 lenne. Az alapegyenlet ezzel az

$$\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{n}$$

alakra redukálható. Itt m_2 csak 2 vagy 3 lehet, ugyanis $m_2 \geq 4$ esetén a bal oldal legfeljebb $1/2$ lenne.

2. eset: $m_2 = 2$.
Ekkor az alapegyenletből $m_3 = n/2$ következik. Ez azt jelenti, hogy G-nek van egy $n/2$ rendű, azaz 2 indexű részcsoportja, amelynek az elemei ugyanazon tengely körüli forgatások. Emiatt ez a részcsoport ciklikus. A G csoport fennmaradó elemei $m_1 = m_2 = 2$ miatt mindannyian másodrendűek, azaz félfordulatok. Ezek a félfordulatok a harmadik, kételemű orbitot önmagába képezik, ezért tengelyeik merőlegesek az $n/2$ rendű ciklikus részcsoport tengelyére. Ezekől a megállapításokból már látszik, hogy a 6.2.5-beli második példában szereplő $D_{n/2}$ diédercsoportról van szó.

A továbbiakban legyen $m_2 = 3$. Ekkor az alapegyenlet az

$$\frac{1}{m_3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{n}$$

alakot ölti, ahonnan következik, hogy m_3 csak 3, 4 vagy 5 lehet.

3. eset: $m_3 = 3$.
Ekkor az egyenletből $n = 12$. Tekintsük a harmadik orbitot: ez egy négy pontból álló halmaz az $\mathbf{S}^2$ gömbfelületen, amely invariáns azokra a harmadrendű forgatásokra, amelyeknek a tengelyei az origón és a négy pont valamelyikén haladnak át. Emiatt a pontok hármanként szabályos háromszöget feszítenek ki, azaz együtt szabályos tetraédert. A G csoport ennek a tetraédernek a forgatásaiból áll és 12 rendű, ezért azonos a tetraéder mozgáscsoportjával.

 © Moussong Gábor, ELTE

4. eset: $m_3 = 4$.
Ekkor $n = 24$. Most a harmadik orbit hatelemű; megmutatjuk, hogy egy oktaéder hat csúcsáról van szó. Válasszuk ki egyiküket. A rajta átmenő tengely körüli forgatásokból álló negyedrendű ciklikus részcsoport a többi öt pontból álló halmazt saját magába képezi, ezért köztük kell lennie a kiválasztottal átellenes pontnak, valamint a maradék négynek négyzetet kell kifeszítenie egy a tengelyre merőleges síkban. Miután a kiválasztott pont bármelyik lehet az orbit hat eleme közül, következik, hogy az orbit középpontosan szimmetrikus, és így valóban oktaédert feszít ki. A G csoport ennek az oktaédernek a forgatásaiból áll és 24 rendű, ezért azonos az oktaéder mozgáscsoportjával.

5. eset: $m_3 = 5$.
Ekkor $n = 60$. A harmadik orbit 12 elemű. Egyik elemét kiválasztva a rajta átmenő tengely körüli ötödrendű szimmetria miatt a maradék 11 pont csak úgy helyezkedhet el, hogy egyikük a kiválasztottal átellenes pont és a többi 10 két szabályos ötszöget alkot a tengelyre merőleges síkokban. Az orbit tehát középpontosan szimmetrikus és a két ötszög is egymás középpontosan szimmetrikus képei. A 12 pont bármelyikének egyenlő a távolsága a hozzá közelebb eső ötszög mindegyik csúcsától, és ez a távolság ugyanakkora a a 12 pont bármelyike esetén. Ezekből a tulajdonságokból már látszik, hogy az orbit egy ikozaéder csúcsaiból áll. A G csoport ennek az ikozaédernek a forgatásaiból áll és 60 rendű, ezért azonos az ikozaéder mozgáscsoportjával. □

Megjegyzések. (1) A 6.2.10. Tétel bizonyítása a véges forgatáscsoportokat az $SO(3)$-beli konjugáltság erejéig osztályozza. Ez egybeesik az izomorfia szerinti osztályozással.

(2) Az $O(3) \cong SO(3) \times \mathbf{Z}_2$ izomorfiát felhasználva a 6.2.10. Tételből könnyen levezethető $O(3)$ véges részcsoportjainak a teljes osztályozása. Nem nehéz meggondolni például, hogy ezek között a csoportok között csak a $G \times \mathbf{Z}_2$ ($G \leq SO(3)$) alakúak azok, amelyek nem izomorfak a 6.2.10-ben felsoroltak egyikével sem.

6.3. Szabályos politópok

Az előző szakaszban láttuk, hogy 2 és 3 dimenzióban szoros kapcsolat van a véges izometriacsoportok és a szabályos sokszögek, illetve szabályos poliéderek szimmetriái között. A magasabb dimenziójú szabályos politópokat is szimmetriatulajdonságaikon keresztül definiáljuk, majd hasonlóság erejéig osztályozzuk őket.

6.3.1. Definíció (Lapzászló). Legyen $P \subseteq E$ politóp, tegyük föl, hogy $\dim P = d$. A P politóp lapzászlóin azokat az $(L_0, L_1, \ldots, L_{d-1})$ sorozatokat értjük, ahol minden i-re $L_i < P$ lap, $\dim L_i = i$, és minden $i < j$-re $L_i < L_j$.

Az $\mathcal{L}(P)$ lapháló bármely valódi lapokból álló maximális rendezett lánc hossza d, azaz 0-tól $(d-1)$-ig minden dimenzióban szerepel benne lap. Emiatt P lapzászlói pontosan az $\mathcal{L}(P)$ lapháló valódi lapokból álló maximális rendezett láncai.